POLItest

il test di Ingegneria al Politecnico di Milano

Maurizio Verri | Marco Bramanti

Matematica

polipress

Maurizio Verri
Marco Bramanti

POLItest
il test di Ingegneria al Politecnico di Milano

Quesiti svolti di Logica,
Matematica, Statistica

polipress

Piazza Leonardo da Vinci, 32 - 20133 Milano

Prima edizione: aprile 2006
Prima ristampa: febbraio 2008

www.polipress.polimi.it

Stampa: Litogì s.a.s. di Gorgone A. & C.
viale Papiniano, 36 - 20123 Milano

ISBN 88-7398-023-6

Indice

Presentazione

A partire dal 2005 il Politecnico di Milano richiede agli studenti che desiderano iscriversi a Ingegneria un livello minimo di conoscenze che permetta loro, con ragionevole probabilità, il successo negli studi universitari. Ottenere la sufficienza nel test di ammissione diventa quindi un prerequisito per sostenere esami e più in generale prove di valutazione nel Politecnico.
Questa richiesta vuole aiutare lo studente a:

- valutare la sua motivazione a intraprendere gli studi di Ingegneria;
- conoscere il livello minimo di conoscenze necessarie per ambire a laurearsi;
- comprendere la necessità di applicarsi, studiare, conoscere, correlare informazioni;
- avere successo negli studi e nella sua futura vita lavorativa

nella certezza che il mercato del lavoro privilegia i nostri Ingegneri, che si sono sempre distinti per capacità e preparazione.
Il test è aperto agli studenti a partire dal quarto anno di scuola secondaria, può essere ripetuto più volte e, una volta superato, dà il diritto allo studente di iscriversi al corso di laurea che più desidera.
Il test è ampiamente descritto nella sezione dedicata ad "Orientamento e Test" nel nostro sito web (http://www.polimi.it) che comprende anche un percorso preliminare utile per autovalutare il proprio grado di preparazione.
Il test è diviso in quattro sezioni: l'inglese, la logica – matematica – statistica, la comprensione verbale, la fisica. Alla matematica, spesso determinante per il raggiungimento della sufficienza, è dedicato questo libro che si propone di aiutare lo studente nel comprendere quale sia il suo livello di preparazione, a diagnosticare le sue eventuali lacune, a migliorare la sua preparazione.

In definitiva ritengo questo libro un aiuto importante per i tanti studenti intenzionati ad intraprendere gli studi nel nostro Ateneo e, forse, anche per i loro insegnanti che stanno preparando i loro allievi ad entrare in università col desiderio di assistere al loro successo.

Giulio Ballio
Rettore del Politecnico di Milano

Agli studenti

Questo volume è rivolto a tutti coloro che si accingono a sostenere il Test di ammissione (*POLITEST*) alle Facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano. Il Test, introdotto vent'anni fa al Politecnico, è obbligatorio per l'iscrizione e si è ormai affermato come strumento che serve ad orientare consapevolmente lo studente nelle proprie scelte. Ma il Test mira anche a verificare se le conoscenze di base in ambito "matematico" che ha lo studente siano sufficientemente solide da permettergli di seguire con profitto i corsi universitari del primo anno, requisito necessario per poi affrontare con successo gli impegnativi studi in ingegneria. Per realizzare questo obbiettivo, abbiamo qui raccolto 130 quesiti di matematica, parte dei quali effettivamente assegnati in test degli anni passati, suddividendoli per argomento e corredandoli di uno svolgimento completo, con commenti e suggerimenti. Il nostro intendimento è che questa raccolta serva allo studente come strumento per autovalutare il livello delle proprie conoscenze, e come guida per individuare quali concetti gli occorra (ri)studiare o approfondire su un libro di testo. Qualora lo studente si accorga di avere difetti di preparazione o lacune su qualche argomento, non si illuda di poter sostituire lo studio sistematico con un mero allenamento manuale su esercizi!

Un elenco dettagliato di conoscenze minime di matematica, da considerarsi prerequisiti indispensabili per chi intende iscriversi ad Ingegneria, è riportato a pag. xi. I quesiti della sezione "Logica, Matematica, Statistica" del *POLITEST* vertono appunto su tali conoscenze. Per trarre il massimo beneficio da questo libro, può essere utile per lo studente tenere conto delle indicazioni seguenti.

Suggerimenti di metodo per affrontare i quesiti

1. Avere sempre carta e penna a portata, e usarle (si ricordi invece che durante il test non è consentito l'uso di calcolatrice né la consultazione di libri). Anche se la domanda è formulata in modo discorsivo, rispondere richiede un ragionamento che talvolta si basa su calcoli, o comunque su deduzioni che è meglio fissare nero su bianco.

2. Leggere attentamente il testo del quesito e le 5 risposte ad esso associate (di cui una sola è quella esatta). Ricordare che ogni parola del testo è un'informazione essenziale che serve a trovare la risposta giusta.

3. Cercare di classificare il quesito che si legge: su che argomento, generale e particolare, verte? Questo è utile per due motivi. Anzitutto, delineare l'argomento è il primo modo per circoscrivere e richiamare alla mente gli strumenti che possono intervenire nella risposta, se si è studiato in modo ordinato. (Ad esempio: se si classifica la domanda come "trigonometria, applicazioni geometriche", il passo successivo può consistere nel chiedersi: quali sono i fatti o i teoremi principali studiati, che riguardano le applicazioni geometriche della trigonometria?).

Inoltre, se lo studente non sa rispondere, deve almeno capire quale argomento non ha chiaro e dovrà studiare!

4. Tenere conto che *una sola delle risposte è giusta*. Questo può portare ad escludere certe risposte per motivi puramente logici: se la risposta A implica la risposta B, la A non può essere la risposta giusta (altrimenti ce ne sarebbero due giuste!). Oppure addirittura, in certi casi, può far individuare indirettamete la risposta esatta: se riesco a far vedere che quattro risposte sono sbagliate (di solito, attraverso opportuni controesempi), quella che rimane è per forza giusta!

5. Imparare a gestire il fattore tempo. In un test il tempo totale a disposizione è limitato; indicativamente il tempo medio per svolgere un singolo quesito va dai 2 ai 4 minuti, comprensivi della sua lettura. Lo studente si deve abituare ad eseguire i calcoli con rapidità e a scegliere di conseguenza i procedimenti opportuni (talvolta ragionare su un disegno o attraverso un diagramma fa risparmiare tempo e fatica).

6. Nel cercare la risposta esatta, conviene di solito privilegiare il "ragionamento aperto" rispetto alla scelta tra opzioni predefinite. Questo significa: ogni volta che le risposte sono precedute da una domanda esplicita, cercare anzitutto di rispondere per proprio conto alla domanda; quindi cercare la propria risposta tra le opzioni offerte. Talvolta tra le opzioni ce ne sono alcune molto simili: la loro lettura attenta può far capire che esiste un problema delicato di cui non si era tenuto conto, e indurre al ripensamento. In ogni caso, evitare di cambiare idea in modo puramente istintivo: se il primo ragionamento svolto autonomamente aveva condotto a scegliere la risposta A, solo un altro ragionamento può far scegliere la risposta B, non il fatto che "suona meglio"!

Suggerimenti di metodo per affrontare lo studio.
Una volta chiaro quali sono gli argomenti attinenti al test su cui non si è abbastanza preparati, come affrontare lo studio relativo?

1. Con una certa sistematicità. Come già detto, per rispondere ai quesiti non si può studiare sui quesiti: occorre studiare su una presentazione ordinata e sistematica della materia. Le varianti con cui si presentano gli esercizi sono praticamente infinite, quindi è indispensabile la padronanza dei concetti.

2. Con spirito critico, ossia cercando la comprensione e il ragionamento, piuttosto che casistiche da imparare a memoria: queste non bastano mai, e si dimenticano in fretta.

3. Cercando la sintesi. La sintesi non è nemica della profondità e della sistematicità dello studio, ma ne è il punto d'arrivo, consapevolmente ricercato. Questo tipo di sintesi è possibile se lo studio è fatto in maniera critica, diventa impossibile se lo studio è mnemonico e superficiale.

4. Con esercizi mirati. In questo lavoro lo studente non avrà tempo di svolgere, su ciascun argomento toccato, tanti esercizi quanti era abituato dalla scuola. Gli esercizi svolti saranno necessariamente in numero limitato, devono però essere scelti in maniera mirata (in modo da "coprire" ogni argomento) e affrontati nello spirito giusto: ancora una volta, non si impara a fare esercizi a forza di fare esercizi! La comprensione del *come si fa* discende dallo studio della teoria e di esempi significativi, e deve precedere la fase in cui lo studente affronta gli esercizi

veri e propri. Questo è il metodo che lo studente vedrà usare in università, ed è lo stesso che deve utilizzare per prepararsi ad entrarvi.

5. Su testi adeguati. Difficilmente i libri di scuola sono adatti allo scopo, e il motivo non è la loro qualità, ma il loro stesso obiettivo: i testi scolastici sono pensati per accompagnare lo studente nello studio della matematica nell'arco di anni, con estrema gradualità e molto esercizio, e inevitabilmente privilegiano la casistica sistematica alla sintesi critica. Lo studente che nell'arco di qualche mese (o settimana!) vuole fare un serio lavoro di ripasso e consolidamento dei prerequisiti, ha bisogno di una presentazione critica ma essenziale, che faccia leva sulla comprensione profonda delle idee fondamentali, e lasci alla riflessione dello studente e all'esercizio, criticamente svolto (v. sopra), lo sviluppo e l'illustrazione delle varie conseguenze. Testi di questo genere sono solitamente scritti in ambito universitario, e rivolti alle "matricole" o agli studenti degli ultimi anni di scuola superiore.

GLI AUTORI

Milano, marzo 2006

Conoscenze minime richieste

ARITMETICA. Scomporre un numero intero in fattori primi. Rappresentare un numero intero in base diversa dalla decimale. Conoscere la differenza tra numeri razionali e irrazionali. Eseguire calcoli con i numeri periodici e con le frazioni. Riconoscere se due frazioni sono equivalenti e saperle confrontare. Operare con disuguaglianze. Conoscere le proprietà e saper eseguire calcoli con le potenze e le radici. Saper usare le usuali regole dell'arrotondamento sui numeri decimali ed eseguire stime dei risultati di calcoli numerici. Calcolare percentuali.

ALGEBRA. Operare con espressioni algebriche o razionali fratte, numeriche o letterali. Trasformare un'espressione in un'altra equivalente. Sapere sommare, moltiplicare, dividere, fattorizzare polinomi. Trovare il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo di polinomi. Conoscere e saper utilizzare la relazione tra fattorizzazione di un polinomio e ricerca delle sue radici. Semplificare o trasformare in una equivalente un'equazione o una disequazione. Risolvere equazioni e disequazioni algebriche di primo e secondo grado, razionali fratte e con radicali. Riconoscere la risolubilità di equazioni e disequazioni in casi particolari. Risolvere sistemi algebrici di primo e di secondo grado. Saper operare con valori assoluti di numeri o di espressioni algebriche.

FUNZIONI. Conoscere la definizione, l'andamento grafico e le principali proprietà delle funzioni fondamentali (potenze, esponenziali, logaritmi, seno, coseno, ecc.). Risolvere equazioni e disequazioni esponenziali, logaritmiche, trigonometriche.

GEOMETRIA. Conoscere i concetti fondamentali della geometria sintetica del piano e dello spazio (parallelismo, ortogonalità, similitudine, poligoni e poliedri, circonferenza e cerchio, sfera, ecc.). Saper realizzare costruzioni geometriche elementari. Calcolare perimetri, aree, volumi di figure elementari nel piano e nello spazio. Conoscere le nozioni fondamentali della geometria analitica del piano e dello spazio. Interpretare geometricamente equazioni e sistemi algebrici di primo e di secondo grado. Conoscere le equazioni o disequazioni che definiscono semplici luoghi geometrici (circonferenza, cerchio, ellisse, parabola, iperbole, sfera, ecc.). Sapere tradurre analiticamente semplici proprietà e problemi geometrici.

LOGICA. Saper operare con gli insiemi. Riconoscere ipotesi e tesi di un teorema. Riconoscere se una data condizione è necessaria o sufficiente. Usare propriamente locuzioni della lingua italiana con valenza logica (se ... allora ...; per ogni ...; esiste almeno un ...; ecc.). Analizzare la correttezza di una deduzione individuando eventuali errori di ragionamento. Sapere negare una proposizione e comprendere un ragionamento per assurdo.

STATISTICA. Risolvere semplici problemi di conteggio (permutazioni, combinazioni, ecc.). Calcolare media, varianza, frequenze relative ed assolute di un assegnato insieme di dati. Sapere tradurre percentuali in frequenze relative, e viceversa. Saper interpretare diagrammi di frequenze ed istogrammi.

TRIGONOMETRIA. Convertire le misure degli angoli dai gradi ai radianti e viceversa. Conoscere le relazioni fra gli elementi (lati, angoli) di un triangolo. Conoscere e saper utilizzare le principali formule trigonometriche per risolvere semplici problemi geometrici.

Lista di simboli

Per rendere più chiara ed immediata la lettura, il testo dei quesiti è stato evidenziato mediante un riquadro grigio ed ogni svolgimento è stato strutturato in parti distinte, segnalate dai seguenti contrassegni:

👁 *classificazione del quesito per argomento generale/particolare*: questa classificazione è ciò che lo studente deve fare per prima cosa, dopo aver letto il testo del quesito

✎ *soluzione del quesito*

☞ *(eventuali) commenti ed osservazioni*

⚓ *puntualizzazione per lo studio*: si mettono in evidenza le conoscenze o le tecniche specifiche che sono state utilizzate nella soluzione

Capitolo 1

Aritmetica

1. La somma $2^{15} + 2^{15}$ è uguale a

   A. 2^{30}

   B. 2^{16}

   C. 4^{15}

   D. un numero irrazionale

   E. 4^{30}

Aritmetica; numeri interi; potenze.

Si ha

$$2^{15} + 2^{15} = 2 \times 2^{15} = 2^{16}$$

La risposta esatta è la B.

La proprietà delle potenze che si è usata (e che si studia a scuola) riguarda il prodotto di due potenze di uguale base ($a^m a^n = a^{m+n}$); non c'è invece nessuna proprietà per la somma $a^m + a^n$ (e non la si studia proprio perché non c'è). Le risposte errate A, C ed E riflettono vari errori di calcolo, basati proprio su presunte proprietà per la somma. Infine, la risposta D è chiaramente assurda perché 2^{15} è certamente un intero e quindi lo è anche $2^{15} + 2^{15}$.

Proprietà delle potenze.

---

2. Si considerino i seguenti numeri

$$91 \qquad 100 \qquad 231 \qquad 440 \qquad 1003$$

Quanti di essi sono numeri primi?

A. Nessuno

B. Uno

C. Due

D. Tre

E. Quattro

👁 *Aritmetica; numeri interi; numeri primi.*

✎ I numeri 100 e 440 non sono primi perché pari (divisibili per 2).

Il numero 231 non è primo perché è divisibile per 3 (si ricordi il criterio di divisibilità per 3: “se la somma delle cifre di un numero è divisibile per 3, il numero è divisibile per 3”; nel nostro caso $2 + 3 + 1 = 6$ è divisibile per 3, quindi lo è anche 231).

Il numero 91 è primo? Ricordiamo che, in generale, per decidere se n è primo occorre verificare che non sia divisibile per nessun numero primo $\leq \sqrt{n}$. Osserviamo poi che per i criteri di divisibilità, 91 non è divisibile per $2, 3, 5$; è divisibile per 7? Sì, perché

$$91 = 70 + 21 = 7 \times 10 + 7 \times 3 = 7 \times 13$$

Il numero 1003 è primo? I criteri di divisibilità dicono che non è divisibile per $2, 3, 5, 11$. Per essere certi che sia primo, dobbiamo verificare che non sia divisibile per nessun numero primo $\leq \sqrt{1003}$, ossia (oltre a quelli già elencati), per

$$7, 13, 17, 19, 23, 29, 31$$

Carta, penna e pazienza ci dicono che

1003 diviso 7 dà 143 e resto 2;
1003 diviso 13 dà 77 e resto 2;
1003 diviso 17 dà 59 e resto 0

Dunque $1003 = 17 \times 59$, e neanche 1003 è primo. Quindi la risposta esatta è la A.

⚓ *Ricerca dei fattori primi di un intero; criteri di divisibilità.*

---

3. Nel sistema di numerazione ternaria le tre sole cifre usate sono 0, 1 e 2. Quindi, ad esempio, si hanno le uguaglianze seguenti (nelle quali il numero in basso ricorda la base):

$$0_{10} = 0_3, \quad 1_{10} = 1_3, \quad 2_{10} = 2_3, \quad 3_{10} = 10_3, \quad 4_{10} = 11_3, \quad 5_{10} = 12_3$$

eccetera. Quale dei seguenti numeri è 912_{10} in forma ternaria?

A. 12101_3

B. 20121_3

C. 1020210_3

D. 210212_3

E. 1010101_3

Aritmetica; numeri interi; rappresentazione di un numero intero in base 3.

Bisogna sapere che se un numero intero positivo è rappresentato in base 3 dalla sequenza di (diciamo) $k+1$ cifre

$$a_k\, a_{k-1} \dots a_2\, a_1\, a_0$$

dove ogni cifra vale 0, 1 o 2, allora la sua rappresentazione in base 10 sarà data da

$$a_k \times 3^k + a_{k-1} \times 3^{k-1} + \dots + a_2 \times 3^2 + a_1 \times 3^1 + a_0 \times 3^0$$

Per identificare la risposta corretta si può allora procedere tramite controllo diretto: ad esempio il numero 12101_3 della risposta A è formato da 5 cifre e quindi corrisponde a

$$1 \times 3^4 + 2 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 81 + 54 + 9 + 0 + 1 = 145_{10}$$

Il fatto che il valore 145 sia piuttosto lontano da 912 suggerisce a questo punto che la risposta corretta sarà probabilmente data da una delle due rappresentazioni più lunghe (la C o la E). Per la C si trova

$$1 \times 3^6 + 0 \times 3^5 + 2 \times 3^4 + 0 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 0 \times 3^0 = 729 + 162 + 18 + 3 = 912_{10}$$

per cui la risposta esatta è la C.

Rappresentazione di un numero intero in base diversa da quella decimale.

---

4. Siano a e b due interi positivi tali che il loro prodotto ab sia multiplo di 10. Allora

   A. a e b sono entrambi pari

   B. a e b sono entrambi multipli di 10

   C. a è multiplo di 10 oppure b è multiplo di 10

   D. a è pari e b è multiplo di 5

   E. a è pari oppure b è pari

Aritmetica; numeri interi.

Il testo dice che il prodotto ab può essere uguale a $10, 20, 30, ...$ e che a e b sono interi positivi, cioè possono assumere i valori $1, 2, 3, ...$ Basta considerare il caso $ab = 10$ ed esplicitare in una tabella i valori corrispondenti di a e di b per constatare che le risposte A, B, C e D sono false.

$a =$	1	2	5	10
$b =$	10	5	2	1
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	
	A e B false	C falsa	D falsa	

Per esclusione la risposta esatta è la E.

Abbiamo individuato indirettamente la risposta esatta mostrando che 4 delle 5 risposte sono false. Volendo invece fare un ragionamento diretto, si può procedere così.

Il punto di partenza è la seguente proprietà dei numeri primi:

> "Se un numero *primo* p divide ab, allora p divide a oppure divide b"

(per inciso facciamo notare che tale proprietà non vale se p non è primo: ad esempio, il numero $p = 6$ divide $4 \times 9 = 36$, ma non divide né $a = 4$ né $b = 9$).
Poiché $10 = 2 \times 5$ e ab è multiplo di 10, in particolare ab è multiplo sia di 2 che di 5, che sono numeri primi. Perciò si può concludere che

2 divide a oppure divide b, e inoltre 5 divide a oppure divide b.

Leggendo ora le risposte, si vede che l'unica ad essere conseguenza di questa affermazione è la E (se 2 divide a o b, allora a è pari oppure b è pari).

Scomposizione di un numero intero in fattori primi, numeri primi e divisibilità.

---

5. Se una certa operazione sugli elementi di un insieme ha come risultato un elemento dell'insieme si usa dire che tale insieme è *chiuso* rispetto a questa operazione.
L'insieme X dei quadrati degli interi positivi

$$X = \{1, 4, 9, 16, ...\}$$

è chiuso rispetto

A. all'addizione

B. alla moltiplicazione

C. alla divisione

D. all'estrazione di radice quadrata

E. a nessuna operazione

Aritmetica; numeri interi; potenze.

L'insieme X è costituito dai numeri n^2, al variare di n tra gli interi positivi. Presi due generici numeri di X, n^2 e m^2, si vede subito che

$$n^2 m^2 = (nm)^2$$

ossia: il prodotto di due elementi di X è un elemento di X. Dunque la risposta B è esatta.

Osserviamo che, viceversa,

la somma o il quoziente di due quadrati in generale non è un quadrato (es. $2^2 + 3^2 = 13$ non è un quadrato, e $2^2/3^2 = 4/9$ non è neppure un intero);

la radice di un quadrato in generale non è un quadrato (es. $\sqrt{2^2} = 2$ non è un quadrato).

Proprietà delle potenze.

---

6. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A. Se x è un numero irrazionale, anche x^2 lo è

B. Se x è un numero razionale, anche $x + \pi$ lo è

C. Se x è un numero irrazionale, allora $x^2 + \pi$ non può essere intero

D. Se x è un numero irrazionale, allora $x/2$ può essere razionale

E. Se x è un numero irrazionale, allora $x + \pi$ può essere intero

Aritmetica; numeri razionali e irrazionali.

La A è falsa: ad esempio, $x = \sqrt{2}$ è irrazionale, ma $x^2 = 2$ è intero (e quindi razionale).

La B è falsa: ad esempio, $x = 0$ è razionale, ma $x + \pi = 0 + \pi = \pi$ è irrazionale.

La C è falsa: ad esempio, se $x = \sqrt{4 - \pi}$, x è irrazionale, ma $x^2 + \pi = 4 - \pi + \pi = 4$ è intero.

La D è falsa: se $x/2$ è razionale, anche x (che è il suo doppio) è razionale; perciò, viceversa, se x è irrazionale allora $x/2$ non può essere razionale.

La E è vera: ad esempio, $x = -\pi$ è irrazionale, eppure $x + \pi = -\pi + \pi = 0$ è intero.

Perciò la risposta esatta è la E.

L'insieme di tutti i numeri razionali costituisce un *campo*, quindi eseguendo somme, differenze, prodotti e quozienti sui numeri razionali, otteniamo ancora numeri razionali. Lo stesso vale per i numeri reali. Invece i numeri irrazionali sono quei numeri reali che non sono razionali: questo insieme numerico non è un campo, perciò non è *chiuso* rispetto alle operazioni aritmetiche (v. quesito n° 5). È questo il motivo per cui, di fronte alle affermazioni proposte in questa domanda, dobbiamo anzitutto diffidare e cercare un controesempio. Il controesempio, per le quattro risposte errate, è molto facile da trovare, tranne forse per la C. In quel caso, il modo naturale di ragionare è:

"Per mostrare che la frase C è falsa, devo far sì che sia $x^2 + \pi = n$ con n intero, ossia $x^2 = n - \pi$"

Dovremo allora scegliere un intero $n > \pi$ (perché $x^2 \geq 0$), ad es. $n = 4$, e poi porre $x = \sqrt{4 - \pi}$. Questo numero è effettivamente irrazionale perché, se fosse razionale, anche il suo quadrato $x^2 = 4 - \pi$ lo sarebbe, e quindi lo sarebbe π, assurdo.

Operazioni aritmetiche sui numeri razionali e irrazionali; irrazionalità di π.

---

7. Indicato con n un qualunque intero, l'espressione

$$\left(2^n + 2^{n+1}\right)^2$$

è uguale a

A. 9×4^n

B. 2^{4n+2}

C. 4^{4n+2}

D. 2^{2n^2+2n}

E. $9 \times 2^{n^2}$

Aritmetica; numeri interi, potenze.

Trasformiamo l'espressione assegnata usando le proprietà delle potenze

$$\left(2^n + 2^{n+1}\right)^2 = (2^n + 2 \times 2^n)^2 = \left((1+2) \times 2^n\right)^2 = (3 \times 2^n)^2 = 9 \times 2^{2n} = 9 \times 4^n$$

Dunque la risposta esatta è la A.

La domanda afferma che per *qualunque* intero n l'espressione $\left(2^n + 2^{n+1}\right)^2$ è sempre uguale a una (e una sola) delle espressioni riportate nelle risposte, quindi per trovare le risposte sbagliate si può anche scegliere un valore di n a piacimento (magari piccolo, per fare conti semplici) e sostituirlo nelle varie espressioni: ne segue che le risposte che danno un risultato diverso da quello della domanda sono certamente errate. Ad es., per $n = 1$ l'espressione $\left(2^n + 2^{n+1}\right)^2$ è uguale a $(2 + 2^2)^2 = 36$, mentre la B dà $2^6 = 64$, la C $4^6 = 4096$, la D $2^4 = 16$ e infine la E $9 \times 2 = 18$. Dunque, per esclusione, la A è esatta (controlliamo: $9 \times 4 = 36$). Si tenga presente, tuttavia, che questo tipo di ragionamento permette di individuare con sicurezza solo le risposte sbagliate. Ad esempio, per $n = 0$ l'espressione $\left(2^n + 2^{n+1}\right)^2$ dà 9, e anche A ed E danno 9 (mentre B, C e D danno risultati diversi), e questo fa concludere solamente che la risposta esatta sarà la A oppure la E; a questo punto, per escludere una delle due, bisogna provare con un altro valore di n.

Proprietà delle potenze.

---

8. La metà di $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ è uguale a

A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$

B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$

C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$

D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$

E. $\left(\frac{1}{4}\right)^{25}$

👁 *Aritmetica; frazioni, potenze.*

✎ La metà di $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ è uguale a

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{50} = \left(\frac{1}{2}\right)^{51}$$

quindi la risposta D è esatta.

☞ Controlliamo rapidamente che le altre risposte affermano qualcosa di diverso. Per B e C è evidente, perché forniscono delle potenze di 1/2 con esponente diverso da 51. La A dà

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{50} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right)^{50} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot 50} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

mentre la E dà

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{25} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right)^{25} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot 25} = \left(\frac{1}{2}\right)^{50}$$

quindi anche queste sono errate.

⚓ *Proprietà delle potenze.*

---

9. Qual è il più piccolo tra i seguenti numeri?

A. 2^{-10}

B. 10^{-2}

C. $\dfrac{1}{2000}$

D. $\dfrac{1}{20}$

E. $\dfrac{2}{1000}$

Aritmetica; frazioni, potenze, confronti numerici.

Il modo in cui sono scritti i numeri suggerisce di riportarli tutti alla forma $1/n$ (con n intero), e poi confrontare i denominatori: a parità di numeratore, la frazione più piccola è quella con il denominatore più grande.

Indicando allora con a, b, c, d, e i numeri proposti dalle risposte A, B, C, D ed E, rispettivamente, si ha

$$a = \frac{1}{2^{10}} \qquad b = \frac{1}{100} \qquad c = \frac{1}{2000} \qquad d = \frac{1}{20} \qquad e = \frac{1}{500}$$

Si vede subito che tra gli ultimi quattro numeri il più piccolo è c (perché 2000 è maggiore di 20, 100 e 500).

Rimane da confrontare a con c, cioè 2^{10} con 2000. Poiché $2^{10} = 1024 < 2000$, il numero c è il più piccolo. Perciò la risposta esatta è la C.

Confronto tra frazioni; proprietà delle potenze.

---

10. Siano

$$x = \sqrt{8+\sqrt{9}} \qquad ; \qquad y = \sqrt{9+\sqrt{8}}$$

Allora

A. $-\dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{y}$

B. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = 1$

C. $-x^2 < -y^2$

D. $x + y < \sqrt{10}$

E. $y < x$

👁 *Aritmetica; radicali.*

✎ I numeri x ed y sono positivi (e diversi tra loro). Quindi la risposta A è equivalente a $y > x$. D'altro canto la risposta E afferma $y < x$, perciò una di queste due risposte è necessariamente vera, e per rispondere è sufficiente capire qual è il maggiore tra i due numeri x ed y. Sono equivalenti le disuguaglianze

$$\begin{array}{rcll} x & < & y & \\ x^2 & < & y^2 & \text{ossia} \qquad 8+\sqrt{9} < 9+\sqrt{8} \\ 8+3 & < & 9+2\sqrt{2} & \\ 2 & < & 2\sqrt{2} & \text{che è vera} \end{array}$$

Perciò anche $x < y$ è vera, e la risposta esatta è la A.

⚓ *Proprietà dei radicali e delle diseguaglianze.*

---

11. Il 15 dicembre 2001 un maglione costava 180 000£. Il 15 gennaio 2002 lo stesso maglione veniva venduto al prezzo di 100€. Ricordando che 1€ = 1 936, 27£, si conclude che il prezzo del maglione è

A. aumentato più del 10%

B. aumentato più del 5%, ma meno del 10%

C. aumentato meno del 5%

D. rimasto invariato

E. diminuito almeno del 5%

Aritmetica; percentuali.

Il prezzo in lire è passato da 180 000 a 193 627, quindi è aumentato di 13 627£. Poiché il 10% di 180 000 è 18 000, e quindi il 5% di 180 000 è 9 000, l'aumento è compreso tra il 5% e il 10%. Quindi la risposta esatta è la B.

Notiamo che, dovendo fare il calcolo senza calcolatrice, ed essendo il prezzo di partenza una cifra tonda, non conviene chiedersi "quale percentuale di 180 000 è 13 627?", ma viceversa chiedersi quanto sono il 10% e il 5% di 180 000, e confrontare queste cifre con l'incremento effettivo.

Calcolo di percentuali.

---

12. Se a e b sono due numeri interi positivi tali che $3a = 2b$, quale delle seguenti deduzioni è corretta?

A. $a + b$ è multiplo di 5

B. $a + b$ è dispari

C. ab è pari ma non è multiplo di 4

D. a oppure b è dispari

E. a e b sono pari

Aritmetica; numeri interi.

L'uguaglianza $3a = 2b$ equivale ad $a/b = 2/3$, il che è possibile se e solo se il numeratore a e il denominatore b sono multipli di 2 e 3, rispettivamente. Se esplicitiamo in una tabella i possibili valori di a e di b, constatiamo subito che le risposte B, C, D ed E sono false.

$a =$	2	4	6	8	$\cdots$
$b =$	3	6	9	12	$\cdots$
	$\Downarrow$	$\Downarrow$		$\Downarrow$	
	E falsa	B e D false		C falsa	

Per esclusione la risposta esatta è la A.

Analogamente a quanto fatto nel quesito n° 4, mostriamo ora che la A è esatta facendo un ragionamento diretto.

L'uguaglianza $3a = 2b$ implica che 3 divide $2b$ e 2 divide $3a$. Ma vale la proprietà

> "Se un numero *primo* p divide ab, allora p divide a oppure divide b"

Quindi

poiché 3 è primo, divide $2b$ e non divide 2, si deduce che 3 divide b;
poiché 2 è primo, divide $3a$ e non divide 3, si deduce che 2 divide a.

Possiamo allora affermare che

$b = 3k$ per qualche intero positivo k, e
$a = 2h$ per qualche intero positivo h

Ma allora il fatto che $3a = 2b$ implica che $3 \times 2h = 2 \times 3k$, da cui $h = k$. In definitiva possiamo dire che, per un certo intero positivo k, si ha

$$b = 3k \qquad \text{e} \qquad a = 2k$$

Cosa se ne può dedurre, con riferimento alle cinque risposte? Sicuramente la A:

$$a + b = 2k + 3k = (2 + 3)\, k = 5k$$

perciò $a + b$ è multiplo di 5.

Scomposizione di un numero intero in fattori primi, numeri primi e divisibilità.

---

13. La somma dei reciproci di due numeri interi positivi è uguale ad uno. Allora la somma dei due numeri è

A. uguale alla loro differenza

B. negativa

C. uguale al loro prodotto

D. nulla

E. uguale ad uno

Aritmetica; numeri interi.

Il *reciproco* di un numero a non nullo è $1/a$. Detti allora n ed m i due numeri interi positivi, sappiamo che

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = 1$$

Un attimo di riflessione mostra che questo è possibile solo se $n = m = 2$. (Infatti se n oppure m vale 1, la somma dei reciproci supera 1; dunque n ed m sono ≥ 2, per cui la somma dei loro reciproci è $\leq 1/2 + 1/2 = 1$, e può valere 1 solo se $n = m = 2$.)

Esaminiamo ora le risposte sapendo che si riferiscono a $n = m = 2$. La somma dei due numeri è 4, e le risposte affermano

A. $4 = 2 - 2 = 0$ falso;

B. $4 < 0$ falso;

C. $4 = 2 \times 2$ vero;

D. $4 = 0$ falso;

E. $4 = 1$ falso.

La risposta esatta è quindi la C.

Numeri interi; disuguaglianze su frazioni.

---

14. Sia

$$x = \sqrt[3]{0,00008}$$

Allora

A. $x = 0,2$

B. $0,04 < x < 0,05$

C. $x = 0,02$

D. $x < 10^{-12}$

E. $0,09 < x < 0,1$

👁 *Aritmetica; radicali, confronti numerici.*

✎ Per eseguire un calcolo (approssimato) senza usare la calcolatrice, utilizziamo le proprietà di potenze e radici, al modo seguente

$$x = \sqrt[3]{0,00008} = \sqrt[3]{80 \times 10^{-6}} = \sqrt[3]{80} \times 10^{-2}$$

Ora, il numero 80 non è un cubo perfetto, ma si vede subito che $\sqrt[3]{80}$ è compresa fra 4 e 5 perché $4^3 = 64$ e $5^3 = 125$. Pertanto x sarà compreso fra 4×10^{-2} e 5×10^{-2}, che è la risposta B.

☞ La troppa fretta o la disattenzione potrebbe indurre a segnare erroneamente come risposta esatta la C: infatti $(0,02)^3 = 0,000008$ e c'è il rischio di confondere questo numero con $0,00008$.

⚓ *Proprietà delle potenze ad esponente razionale (uguaglianze e disuguaglianze).*

---

15. L'ordinamento corretto fra i numeri 2^{500}, 5^{300} e 10^{100} è

A. $2^{500} < 5^{300} < 10^{100}$

B. $5^{300} < 2^{500} < 10^{100}$

C. $10^{100} < 5^{300} < 2^{500}$

D. $10^{100} < 2^{500} < 5^{300}$

E. $5^{300} < 10^{100} < 2^{500}$

Aritmetica; potenze, confronti numerici.

I tre numeri dati sono enormi, perciò non è possibile stabilirne l'ordinamento calcolandoli esplicitamente. L'idea è riscrivere i tre numeri come potenze con basi diverse ma esponente uguale, e poi confrontare le basi: a parità di esponente, la potenza più grande è quella con base più grande (se le basi sono maggiori di 1). Siccome l'esponente più basso è 100, scegliamo questo come esponente comune: allora, per le proprietà delle potenze,

$$\begin{aligned} 2^{500} &= \left(2^5\right)^{100} = 32^{100}, \\ 5^{300} &= \left(5^3\right)^{100} = 125^{100} \end{aligned}$$

e, poiché $10 < 32 < 125$, si ha anche $10^{100} < 32^{100} < 125^{100}$, ossia $10^{100} < 2^{500} < 5^{300}$. Quindi la risposta esatta è la D.

In linea di principio il confronto dei tre numeri si poteva anche fare trasformandoli in potenze con basi uguali ma esponente differente, e poi confrontando gli esponenti. Se però lo studente ci prova, capirà subito che nel nostro caso i conti sono troppo complicati, e quindi che questa non è certo la strada giusta ...

Proprietà delle potenze.

---

16. Sia

$$a = 20^{11}$$

Allora si ha

A. $10^{12} < a < 10^{13}$

B. $10^{13} < a < 10^{14}$

C. $10^{14} < a < 10^{15}$

D. $10^{15} < a < 10^{16}$

E. $10^{16} < a < 10^{17}$

👁 *Aritmetica; potenze, confronti numerici.*

✎ Per confrontare il numero 20^{11} con opportune potenze di 10, conviene riscriverlo così

$$20^{11} = (2 \times 10)^{11} = 2^{11} \times 10^{11} = 2048 \times 10^{11} = 2,048 \times 10^3 \times 10^{11} = 2,048 \times 10^{14}$$

Perciò la risposta esatta è la C.

⚓ *Proprietà delle potenze.*

Capitolo 2

Algebra

17. Se un polinomio $P(x)$ è divisibile per $x^2 - 4$, allora

A. 2 e -2 sono certamente radici di $P(x)$

B. 2 non è una radice di $P(x)$

C. -2 non è una radice di $P(x)$

D. $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ sono certamente radici di $P(x)$

E. $P(x)$ non ha radici reali

Algebra; polinomi.

Per definizione di quoziente e resto nella divisione di polinomi, il testo della domanda significa che

$$P(x) = \left(x^2 - 4\right) Q(x)$$

dove $Q(x)$ è il quoziente nella divisione e il resto è nullo. Poiché 2 e -2 annullano il polinomio $x^2 - 4$, e quindi il secondo membro dell'identità precedente, devono annullare anche il primo, ossia: 2 e -2 sono certamente radici di $P(x)$. Perciò la risposta esatta è la A.

Divisione tra polinomi, radici di un polinomio.

---

18. Sia $x < 2$. Allora l'espressione

$$\sqrt{4(x-2)^2}$$

A. è uguale a $4x - 8$

B. è uguale a $2x - 4$

C. non è definita

D. è uguale a $4 - 2x$

E. è uguale a $8 - 4x$

Algebra; calcolo letterale, radicali.

Un'occhiata veloce alle risposte mostra che si chiede di semplificare il radicale $\sqrt{4\,(x-2)^2}$. Occorre ricordare che in generale, detto a un generico numero reale, si ha $\sqrt{a^2} = |a|$ (e non $\sqrt{a^2} = a$ né tantomeno $\sqrt{a^2} = \pm a$, perché a può essere anche negativo e nell'ambito dei numeri reali il simbolo $\sqrt{\cdot}$ indica sempre un numero positivo o nullo). In questo caso è $a = 2\,(x-2)$, perciò $\sqrt{4\,(x-2)^2} = 2\,|x-2|$. A sua volta, l'informazione $x < 2$ implica $2\,|x-2| = 2\,(2-x) = 4 - 2x$. Perciò la risposta giusta è la D.

Leggiamo le altre risposte: A, B ed E, corrispondono a qualche errore di calcolo o di ragionamento sul valore assoluto; la C deve spingerci a chiederci: siamo sicuri che l'espressione di partenza sia definita? La risposta è: sì, perché il radicando $4\,(x-2)^2$, essendo un quadrato, sicuramente non è negativo.

Definizione di radice quadrata nel campo reale, da cui segue la relazione $\sqrt{a^2} = |a|$. Definizione di valore assoluto e discussione del valore assoluto di un'espressione algebrica.

---

19. Il massimo comune divisore tra i polinomi

$$P(x) = x^3 - x^2 \qquad Q(x) = x^3 - 2x^2 + x \qquad R(x) = x^3 - x$$

è

A. $x^2 (x-1)^2$

B. x

C. x^3

D. $(x^2 - 1)(x^3 - x^2)$

E. $x^2 - x$

Algebra; polinomi.

Fattorizziamo ciascun polinomio

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 (x-1) \\ Q(x) &= x\left(x^2 - 2x + 1\right) = x(x-1)^2 \\ R(x) &= x\left(x^2 - 1\right) = x(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

Confrontando le tre fattorizzazioni, si vede che il massimo comune divisore è

$$x(x-1)$$

(x e $x-1$ sono gli unici fattori comuni, e sono presi con il minimo esponente con cui compaiono nelle tre fattorizzazioni). La risposta esatta quindi è la E.

Lo studente che ha difficoltà a comprendere il precedente ragionamento, faccia il parallelo con il procedimento che seguirebbe per cercare il massimo comune divisore fra tre numeri interi, es. $24, 21, 81$ (scomposizione in fattori primi, ecc.). Ciò che si fa con i polinomi è perfettamente analogo.

Fattorizzazione di polinomi, concetto di massimo comune divisore.

---

20. Sia m un parametro reale. Se il resto della divisione del polinomio

$$2x^4 - mx^3 + x^2 - 7$$

per il binomio

$$x + 2$$

è 5, allora

A. occorre che sia $m = -3$

B. occorre che sia $m = 3$

C. non esiste nessun m per cui ciò sia possibile

D. m può assumere qualunque valore

E. occorre che sia $m = 0$

Algebra; polinomi.

Per definizione di quoziente e resto nella divisione di polinomi, il testo della domanda significa

$$2x^4 - mx^3 + x^2 - 7 = (x + 2)\, Q(x) + 5$$

dove $Q(x)$ è il polinomio quoziente, che avrà grado 3. (Parallelo con la divisione tra numeri interi: ad es., il resto della divisione di 37 per 9 è 1, il che significa $37 = 9 \times 4 + 1$ dove 4 è il quoziente.) Se nell'identità precedente poniamo $x = -2$, otteniamo

$$32 + 8m + 4 - 7 = 0 + 5$$

equazione di primo grado in m la cui soluzione è

$$m = -3$$

La risposta esatta è quindi la A.

Lo studente che volesse avere una riprova di non avere sbagliato i calcoli, può ora eseguire la divisione

$$\left(2x^4 + 3x^3 + x^2 - 7\right) : (x + 2)$$

trovando quoziente $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 6$ e resto 5.

Definizione di quoziente e resto nella divisione tra polinomi.

---

21. L'equazione algebrica
$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$
con $a > 0$, b reale e $c < 0$

A. non ammette radici reali

B. ammette un'unica radice reale

C. ammette due radici reali

D. ammette tre radici reali

E. ammette quattro radici reali

Algebra; equazioni algebriche.

Ricordiamo che un'equazione algebrica di quarto grado a coefficienti reali può avere da 0 a 4 soluzioni reali: senza qualche calcolo o considerazione su questa *specifica* equazione, quindi, non è possibile scegliere una risposta tra quelle proposte. Questa equazione di quarto grado è *biquadratica*, cioè riconducibile a un'equazione di secondo grado tramite l'introduzione dell'incognita ausiliaria $t = x^2$
$$at^2 + bt + c = 0$$
Tale equazione in t ha discriminante $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ perché si sa che $a > 0$ e $c < 0$, quindi essa ha due radici reali distinte, t_1 e t_2. Che segno hanno tali radici? Se $b = 0$ le radici hanno segni opposti perché $t_{1,2} = \pm\sqrt{-c/a}$. Se $b \neq 0$, applichiamo la "Regola di Cartesio":

> "L'equazione $at^2 + bt + c = 0$ (a, b, c non nulli, $\Delta \geq 0$) ha tante radici positive (negative) quante sono le variazioni (permanenze) di segno dei coefficienti"

Essendo $a > 0$ e $c < 0$, la nostra equazione presenta una permanenza e una variazione, quindi le due radici hanno sempre segni opposti, diciamo $t_1 > 0$ e $t_2 < 0$.

Tornando all'incognita x, dobbiamo infine determinare gli x per cui è $x^2 = t_1$ o $x^2 = t_2$. Ora, l'equazione $x^2 = t_1$ ha due soluzioni reali e distinte (perché $t_1 > 0$), mentre l'equazione $x^2 = t_2$ non ha soluzioni reali (perché $t_2 < 0$). Di conseguenza la risposta esatta è la C.

Formula risolutiva dell'equazione di secondo grado; equazioni biquadratiche; regola di Cartesio; radice quadrata di un numero reale.

---

22. Sia K un parametro reale. Allora la seguente equazione nell'incognita reale x

$$x^2 - (K-2)\,x + K - 1 = 0$$

ha soluzioni opposte

A. per ogni valore di K

B. solo se $(K-2)^2 - 4\,(K-2) = 0$

C. per $K = 1$

D. per $K = 2$

E. per nessun valore di K

Algebra; equazioni algebriche con parametro.

Chiediamoci quando un'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ ha soluzioni opposte. Ricordiamo che la somma delle radici dell'equazione è $-b/a$; le radici sono *opposte* se e solo se la loro somma è zero, ossia se e solo se $b = 0$.
(Alla stessa conclusione si può arrivare scrivendo la formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e imponendo che $x_1 = -x_2$.)
Imponiamo dunque la condizione $b = 0$ alla nostra equazione e otteniamo

$$K - 2 = 0, \qquad \text{ossia} \quad K = 2$$

Sembrerebbe quindi di dover concludere che la risposta esatta sia la D. Tuttavia, per $K = 2$ l'equazione diventa

$$x^2 + 1 = 0$$

che in effetti non ha alcuna soluzione reale! Il ragionamento precedente non è errato: le soluzioni dell'equazione $x^2 + 1 = 0$ sono $\pm i$, con i unità immaginaria, e sono effettivamente opposte tra loro; tuttavia *non sono reali*. Poiché la domanda parlava di *equazione nell'incognita reale* x, la risposta esatta è la E.

In generale, dovendo rispondere a una domanda sul numero di soluzioni di un'equazione, è fondamentale tenere ben presente *qual è l'insieme numerico in cui si cercano tali soluzioni.*

Risoluzione delle equazioni algebriche di secondo grado, relazioni tra le radici e i coefficienti dell'equazione.

---

23. L'equazione nell'incognita razionale x

$$\left(4x^2 - 25\right)\left(x^3 + 9\right) = 0$$

A. non ammette soluzioni

B. ammette tre soluzioni distinte

C. ammette due soluzioni distinte

D. ammette cinque soluzioni

E. non si può risolvere, perché è di quinto grado

Algebra; equazioni algebriche.

Poiché il prodotto $(4x^2 - 25)(x^3 + 9)$ si annulla se e solo se si annulla uno dei suoi fattori ("Legge di annullamento di un prodotto"), l'equazione è soddisfatta se

$$x^2 = \frac{25}{4}, \qquad \text{cioè} \quad x = \pm\frac{5}{2}$$

o se

$$x^3 = -9, \qquad \text{cioè} \quad x = -\sqrt[3]{9}$$

Poiché i numeri $\pm 5/2$ sono razionali (quozienti fra numeri interi), mentre il numero $-\sqrt[3]{9}$ è irrazionale, l'equazione ha due soluzioni razionali distinte. Quindi la risposta esatta è la C.

Per affermare che $\sqrt[3]{9}$ (e quindi il suo opposto) è irrazionale, lo studente può ricordare il seguente fatto generale:

> "La radice n-esima di un numero intero (con $n \geq 2$) è un numero intero oppure è un numero irrazionale"

Poiché $2^3 = 8 < 9$ e $3^3 = 27 > 9$, non esiste alcun numero intero il cui cubo sia 9, dunque $\sqrt[3]{9}$ non è intero, e perciò è irrazionale.

In questo quesito è importante la precisazione (sottolineata nel testo!) che le soluzioni si cercano nell'insieme dei numeri razionali. Chi non avesse notato questa precisazione (ma avesse fatto comunque dei calcoli esatti), avrebbe scelto la risposta B, errata. Come già osservato nel quesito n° 22, dovendo rispondere a una domanda sul numero di soluzioni di un'equazione, è fondamentale tenere ben presente qual è l'insieme numerico in cui si cercano tali soluzioni.

Legge di annullamento di un prodotto; radicali; razionalità o irrazionalità della radice n-esima di un intero.

---

24. Il seguente sistema nelle incognite reali x ed y

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

ammette

A. due soluzioni

B. nessuna soluzione

C. una soluzione

D. quattro soluzioni

E. più di quattro soluzioni

Algebra; sistemi di equazioni.

Usando il prodotto notevole $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$, riscriviamo il sistema come

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

e quindi, ricavando $y = x - 1$ dalla seconda equazione e sostituendo nella prima, troviamo l'equazione di secondo grado in x

$$x^2 + x(x-1) + (x-1)^2 = 1, \qquad \text{cioè} \quad 3x^2 - 3x = 0$$

che dà $x = 0$, $x = 1$. Risostituendo nell'equazione $y = x - 1$ abbiamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

La risposta esatta quindi è la A.

Si ricordi che *una* soluzione di un sistema di equazioni in *due* incognite x ed y è *una coppia* (ordinata) di valori che, attribuiti rispettivamente alle incognite, rendono ciascuna equazione del sistema un'identità. Lo studente che non avesse avuto ben chiara in mente questa definizione, avrebbe potuto indicare erroneamente come giusta la risposta D anzichè la A.

Risoluzione dei sistemi di due equazioni in due incognite, prodotti notevoli.

---

25. Indicare quante coppie ordinate (m, n) di interi positivi m ed n verificano la condizione

$$(m+n)^2 = (m-n)^2 + 64$$

A. Nessuna

B. Cinque

C. Sei

D. Dieci

E. Infinite

Algebra; equazioni algebriche.

Sviluppando i quadrati e semplificando, riscriviamo l'uguaglianza di partenza nella forma

$$2mn = -2mn + 64$$

ossia

$$mn = 16$$

Chiediamoci ora quante sono le coppie (m, n) di interi positivi il cui prodotto è 16. Si elencano facilmente:

$$(1,16)\,, \quad (2,8)\,, \quad (4,4)\,, \quad (8,2)\,, \quad (16,1)$$

La risposta esatta quindi è la B.

☞ È fondamentale la precisazione (contenuta nella domanda) che m ed n siano *interi positivi*: le soluzioni *reali* x ed y dell'equazione $xy = 16$ sono ovviamente infinite!

⚓ *Calcolo letterale; calcolo con gli interi.*

---

26. Indicare quante coppie ordinate (x, y) di numeri reali positivi x ed y verificano la condizione

$$x + y = xy$$

A. Nessuna

B. Una sola

C. Un numero pari di coppie

D. Infinite

E. Il problema non ha soluzione

Algebra; equazioni.

✎ Un'equazione in due incognite reali è *in generale* indeterminata (cioè ha infinite soluzioni); occorre però capire come la restrizione $x > 0$, $y > 0$, richiesta nella domanda, condiziona il problema. Ricaviamo allora y in funzione di x

$$y\,(x - 1) = x$$

e quindi (non potendo essere $x = 1$, perché in tal caso l'equazione dà $y \times 0 = 0 = x$, assurdo)

$$y = \frac{x}{x - 1}$$

Allora $y > 0$ se e solo se $\dfrac{x}{x-1} > 0$, il che è vero per $x < 0$ (da scartare) oppure $x > 1$ (accettabile). Perciò la coppia di numeri positivi $(x, y) = \left(x, \dfrac{x}{x-1}\right)$ soddisfa l'equazione di partenza per ogni $x > 1$. La risposta esatta è quindi la D: le soluzioni sono infinite.

Per capire come una restrizione sui valori delle incognite possa condizionare il numero di soluzioni dell'equazione, si noti che se fosse stato richiesto $x < 0$ e $y < 0$ al posto di $x > 0$ e $y > 0$, allora evidentemente non ci sarebbe stata nessuna soluzione in quanto $x + y < 0$ e $xy > 0$.

Tecniche di base per la risoluzione di equazioni e disequazioni algebriche.

---

27. Due numeri reali x ed y verificano le condizioni

$$x > y \qquad \text{e} \qquad xy > 0$$

Si può allora concludere che

A. $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$

B. $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$

C. $x^2 > y^2$

D. $x > 0 \quad$ e $\quad y > 0$

E. $x > 0 \quad$ o $\quad y > 0$

Algebra; sistemi di disequazioni.

La condizione $xy > 0$ significa che x ed y hanno lo stesso segno. Distinguiamo i due casi. Se x e y sono positivi, $x > y$ equivale a $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$ (come afferma la A); se invece x e y sono negativi, $x > y$ equivale a

$$1 < \frac{y}{x}$$

e quindi a

$$\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$$

che è ancora la A. Quindi la A è vera.

☞ Le risposte sbagliate riflettono altrettanti errori di calcolo. Così, la C riproduce l'errore frequente secondo cui da $x > y$ segue sempre $x^2 > y^2$, il che è vero se y (e quindi x) è positivo, ma in generale è falso se y è negativo (nella domanda si intende che x e y siano *generici* numeri reali: leggere attentamente il testo!). Ad es., si pensi a $3 > -4$ ($9 > 16$ è falso) oppure a $-2 > -3$ ($4 > 9$ è falso). Lo studente si convinca attraverso semplici controesempi che anche B, D ed E sono errate.

⚓ *Tecniche di base per la risoluzione di disequazioni algebriche.*

---

28. Il polinomio

$$x^3 + 3x^2 - 4x$$

è divisibile per

A. $x + 2$

B. $x - 4$

C. $x + 4$

D. x^3

E. $x + 1$

👁 *Algebra; polinomi.*

✎ Scomponiamo il polinomio in fattori di primo grado

$$x^3 + 3x^2 - 4x = x\left(x^2 + 3x - 4\right) = x\,(x-1)\,(x+4)$$

Perciò la risposta esatta è la C.

Notiamo che, dopo aver raccolto la x, il trinomio $x^2 + 3x - 4$ è stato decomposto "a occhio", data la semplicità dei coefficienti; volendo procedere più sistematicamente, si osservi che

1. la somma dei coefficienti è zero, quindi $x = 1$ è una radice del trinomio (questa è una proprietà generale: sostituendo $x = 1$ in $ax^2 + bx + c = 0$ si trova $a + b + c = 0$), quindi (teorema di Ruffini) il trinomio è divisibile per $x - 1$, e a questo punto lo si scompone;

2. oppure, in alternativa, si può risolvere l'equazione di secondo grado $x^2 + 3x - 4 = 0$ e, trovate le due soluzioni $x = 1$ e $x = -4$, ancora per il teorema di Ruffini decomporre il trinomio.

Due altri possibili strade per la risoluzione sono le seguenti.

1. Eseguire direttamente la divisione del polinomio dato per ciascuno di quelli proposti nelle varie risposte; la risposta esatta è l'unica per la quale il resto della divisione è zero. Questo metodo però è sconsigliabile perché può richiedere di dover fare fino a quattro divisioni prima di riuscire a trovare la risposta giusta.

2. Usare la seguente proprietà dei polinomi:

> "un polinomio è divisibile per il binomio $x - a$ se e solo se $x = a$ è una sua radice"

Questo metodo è molto veloce. Ad esempio, la risposta A risulta sbagliata perché $x = -2$ non è radice del polinomio (sostituendo $x = -2$, si trova $-8+12+8 = 12 \neq 0$), mentre la risposta C è giusta perché $x = -4$ è una radice (sostituendo, si trova $-64+48+16 = 0$).

Scomposizione di un polinomio e teorema di Ruffini; trinomio di secondo grado.

---

29. L'equazione nell'incognita reale x

$$\frac{x^2 - 3x}{3 - x} = -2$$

A. non ha soluzioni

B. ha due soluzioni

C. ha l'unica soluzione $x = 3$

D. ha un'unica soluzione la quale è diversa da 3

E. ha più di due soluzioni

Algebra; equazioni razionali fratte.

✎ Riscriviamo l'equazione come

$$\frac{x\,(x-3)}{3-x} = -2$$

Ora: se $x = 3$, l'equazione perde significato; se invece $x \neq 3$, si può semplificare per $x-3$, ottenendo il valore $x = 2$, che è una soluzione accettabile. Quindi l'equazione ha un'unica soluzione, $x = 2$.

Leggendo a questo punto le affermazioni contenute nelle risposte, si vede che l'unica vera è la D (anche se questa *non dice* quale sia la soluzione).

☞ La risposta B può trarre in inganno chi, per risolvere l'equazione, ne moltiplica ambo i membri per $3 - x$, ottenendo (dopo semplici calcoli) l'equazione di secondo grado

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

che ha le radici $x = 2$ e $x = 3$. Ma ora bisogna osservare che le soluzioni non sono entrambe accettabili, perché per $x = 3$ l'equazione di partenza non ha senso, e quindi la risposta esatta è la D e non la B.

⚓ *Risoluzione di equazioni razionali fratte.*

---

30. Sia K un parametro reale. Allora l'equazione nell'incognita reale x

$$x^2 + (K+2)\,x + K^2 = 0$$

non ha soluzioni

A. per un unico valore di K

B. per due soli valori di K

C. per ogni valore negativo di K

D. per nessun valore di K

E. per infiniti valori di K

👁 *Algebra; equazioni algebriche con parametro.*

Per ogni valore di K, l'equazione è di secondo grado in x (perché il coefficiente di x^2 è 1). Perciò l'equazione *non ha soluzioni reali* se e solo se il suo discriminante è negativo, ossia

$$(K+2)^2 - 4K^2 < 0$$

Riscrivendo questa disequazione nella forma

$$3K^2 - 4K - 4 > 0$$

si vede subito che essa ha infinite soluzioni, perché il coefficiente di K^2 e il termine noto sono discordi, quindi il discriminante è positivo, e la disequazione è soddisfatta per tutti i valori K di un certo intervallo, che non ci interessa determinare esplicitamente. Concludendo, per infiniti valori di K l'equazione in x non ha soluzioni reali. Quindi la risposta esatta è la E.

Risoluzione di equazioni e disequazioni algebriche di secondo grado.

---

31. L'equazione nell'incognita reale x

$$2 + 3|x-3| = 13 - x$$

A. ha un'unica soluzione

B. non ha soluzioni

C. ha due soluzioni positive

D. ha due soluzioni di segno opposto

E. ha infinite soluzioni

Algebra; equazioni con termini in valore assoluto.

Risolviamo l'equazione discutendo il modulo.

Se $x \geq 3$ l'equazione si riscrive come

$$\begin{aligned} 2 + 3(x-3) &= 13 - x \\ 4x &= 20 \\ x &= 5 \qquad \text{accettabile} \end{aligned}$$

Se $x \leq 3$ l'equazione si riscrive come

$$\begin{aligned} 2+3\,(3-x) &= 13-x \\ 2x &= -2 \\ x &= -1 \qquad \text{accettabile} \end{aligned}$$

Quindi l'equazione ha due soluzioni, di segno opposto, e la risposta esatta è la D.

Risoluzione di equazioni contenenti valori assoluti, con discussione del modulo.

32. Siano a e b due numeri reali tali che $a < 3$ e $b \leq 0$. Allora

A. $ab \leq 3b$

B. $ab \geq 3b$

C. $ab > 3b$

D. $ab < 3b$

E. $ab \geq 0$

Algebra; disuguaglianze.

Per sfruttare le note regole sulle disuguaglianze, occorre distinguere il caso $b < 0$ dal caso $b = 0$.

Se $b < 0$, dalla relazione $a < 3$ segue $ab > 3b$.
(Ricordiamo che: "moltiplicando ambo i membri di una disuguaglianza per una stessa quantità negativa, si ottiene una disuguaglianza equivalente pur di cambiare il verso della disuguaglianza".)

Se $b = 0$, si ha $ab = 0$.

In entrambi i casi la risposta B è vera: infatti se $b < 0$, allora $ab > 3b$ e in particolare $ab \geq 3b$ è vera, mentre se $b = 0$ la relazione $ab \geq 3b$ significa $ab \geq 0$, che è vera perché in questo caso $ab = 0$. Quindi la risposta esatta è la B.

Se x è un numero, affermare che $x \geq 0$ significa dire che x è un numero positivo ($x > 0$) oppure nullo ($x = 0$). Quindi, se è vera la disuguaglianza "stretta" $x > 0$, è vera anche la disuguaglianza "debole" $x \geq 0$ (ad es., $2 \geq 0$ è vera), ma non viceversa.

Proprietà delle disuguaglianze.

---

33. Se x è un numero reale *negativo*, allora

A. $x\,|x| > 0$

B. $\dfrac{x}{|x|} > 0$

C. $x + |x| > 0$

D. $x - |x| < 0$

E. $-x\,|x| < 0$

Algebra; valore assoluto di un numero.

Se $x < 0$, allora $|x| = -x$. Di conseguenza

A. $x\,|x| = x\,(-x) = -x^2 < 0$ falso;

B. $\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{x}{-x} = -1 < 0$ falso;

C. $x + |x| = x + (-x) = 0$ falso;

D. $x - |x| = x - (-x) = 2x < 0$ vero;

E. $-x\,|x| = -x\,(-x) = x^2 > 0$ falso.

La risposta esatta quindi è la D.

Definizione di valore assoluto di un numero.

---

34. Dire per quali valori di x è verificata la disequazione

$$\frac{x+2}{x+1} \geq 1$$

A. Per qualunque x reale

B. Per qualunque x reale, diverso da -1

C. Per x maggiore di -1

D. Per x maggiore di -1 oppure minore o uguale di -2

E. Per x minore o uguale di -2

Algebra; disequazioni razionali fratte.

Imponiamo $x \neq -1$ e portiamo tutto a primo membro facendo denominatore comune

$$\frac{x+2-x-1}{x+1} \geq 0$$

ossia

$$\frac{1}{x+1} \geq 0$$

verificata per $x > -1$. La soluzione esatta è la C.

Tecniche di base per la risoluzione di disequazioni razionali fratte.

---

35. La soluzione dell'equazione

$$x^3 = \frac{81}{10}$$

è

A. $2 \times \sqrt[3]{\frac{1}{10}}$

B. $2 + \sqrt[3]{\frac{1}{10}}$

C. $3 \times \sqrt[3]{\frac{1}{10}}$

D. $3 + \sqrt[3]{\frac{1}{10}}$

E. $3 \times \sqrt[3]{\frac{3}{10}}$

Algebra; radicali.

Risolviamo

$$x = \sqrt[3]{\frac{81}{10}} = \sqrt[3]{\frac{3^4}{10}} = \sqrt[3]{\frac{3^3 \times 3}{10}} = 3 \times \sqrt[3]{\frac{3}{10}}$$

La risposta esatta è la E.

Proprietà di potenze e radicali.

---

36. La disequazione

$$(x-1)(x-2)(x-3) > 0$$

è verificata se e solo se

A. $x > 1$

B. $x > 3$

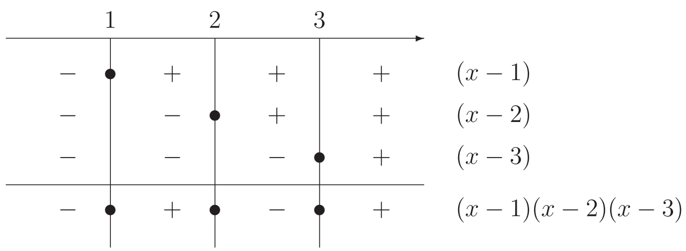
C. $1 < x < 2$ oppure $x > 3$

D. $x < 1$ oppure $x > 3$

E. x è diverso da 1, da 2 e da 3

Algebra; disequazioni algebriche.

Il primo membro è un prodotto di tre fattori, il cui segno si studia con la regola dei segni. Uno schema del tipo



ci dice che la disequazione è soddisfatta per $1 < x < 2$ oppure per $x > 3$. Quindi la risposta esatta è la C.

Risoluzione di disequazioni algebriche; regola dei segni.

---

37. La disequazione

$$x^3 \leq x^4$$

è verificata se e solo se

A. $x \geq 0$

B. $x \geq 1$

C. $x \leq -1$ oppure $x \geq 1$

D. $x \leq 0$ oppure $x \geq 1$

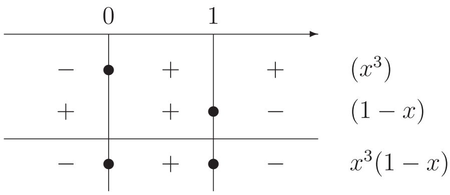
E. x è un numero reale qualunque

Algebra; disequazioni algebriche.

Riscriviamo la disuguaglianza

$$\begin{aligned} x^3 - x^4 &\leq 0 \\ x^3(1-x) &\leq 0 \end{aligned}$$

Ora è sufficiente studiare il segno del prodotto con la regola dei segni. Lo schema seguente



mostra che la disequazione è verificata se $x \leq 0$ oppure per $x \geq 1$. La risposta esatta quindi è la D.

Risoluzione di disequazioni algebriche; regola dei segni.

Capitolo 3

Funzioni

38. Posto

$$a = 0,21 \qquad b = \frac{1}{5} \qquad c = \frac{1}{\log_2 5}$$

si ha

A. $c < a < b$

B. $a < b < c$

C. $c < b < a$

D. $b < a < c$

E. $a < c < b$

Funzioni; logaritmi; confronti numerici.

Poiché $b = 1/5 = 0,2$ si vede subito che $b < a$. Questo già esclude le risposte A, B, E. Chiediamoci allora se è vero che $c < b$. In caso affermativo, la risposta esatta è la C, altrimenti per esclusione è la D. Ora, $c < b$ equivale a

$$\frac{1}{\log_2 5} < \frac{1}{5}, \qquad \text{ossia} \qquad 5 < \log_2 5$$

che è falsa, perché l'esponente da mettere a 2 per avere 5 è compreso, ad es., tra 2 e 3 ($2^2 = 4 < 5$; $2^3 = 8 > 5$), quindi $\log_2 5 < 3$. Pertanto la risposta esatta dev'essere la D.

Definizione di logaritmo, proprietà delle disuguaglianze.

---

39. Quale delle seguenti espressioni è uguale a $\log(1-x^2)$ per ogni numero reale x tale che $0 < x < 1$?

A. $-\log x^2$

B. $\dfrac{\log 1}{\log x^2}$

C. $2\log(1-x)$

D. $\log(1-x) + \log(1+x)$

E. $\log(1-x) \times \log(1+x)$

👁 *Funzioni; logaritmi.*

✎ Ricordiamo anzitutto la proprietà del logaritmo di un prodotto (valida per $a > 0$ e $b > 0$, perché hanno senso solo i logaritmi di numeri positivi)

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

Allora

$$\log\left(1-x^2\right) = \log\big[(1-x)(1+x)\big] = \log(1-x) + \log(1+x)$$

e quindi la D è la risposta esatta.

Notiamo che la condizione $0 < x < 1$ garantisce che si abbia $1-x > 0$ e $1+x > 0$, per cui tutte le espressioni scritte hanno senso, e vale la precedente catena di uguaglianze.

☞ Si ricordi che non esiste nessuna proprietà per il logaritmo di una somma o di una differenza, cioè per $\log(a \pm b)$. Le risposte sbagliate indicano alcuni dei possibili errori di calcolo originati da questa falsa (ma diffusa!) convinzione.

⚓ *Proprietà dei logaritmi.*

---

40. Sia

$$a = 2^{\log_2 7 + \log_{1/2} 3}$$

Allora

A. $a = 4$

B. $a = 7 + \dfrac{1}{3}$

C. $a = \dfrac{7}{3}$

D. $a = 21$

E. $a = -21$

Funzioni; logaritmi.

Per una proprietà delle potenze si ha

$$2^{\log_2 7 + \log_{1/2} 3} = 2^{\log_2 7} \times 2^{\log_{1/2} 3}$$

Per definizione di logaritmo,

$$2^{\log_2 7} = 7$$

mentre per le proprietà dei logaritmi

$$\log_{1/2} 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 (1/2)} = -\log_2 3 = \log_2 \frac{1}{3}$$

e quindi

$$2^{\log_{1/2} 3} = 2^{\log_2 (1/3)} = \frac{1}{3}$$

In definitiva,

$$a = 2^{\log_2 7} \times 2^{\log_{1/2} 3} = \frac{7}{3}$$

Quindi la risposta esatta è la C.

Definizione e proprietà dei logaritmi (in particolare, proprietà del cambiamento di base); proprietà delle potenze.

---

41. Quante delle seguenti uguaglianze sono verificate per ogni numero reale $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 1/2$?

$$\log_{2a} a = \frac{1}{2} \quad ; \quad \log_{\sqrt{a}} \frac{1}{a} = -2$$
$$(\log_a a^2)(\log_{a^2} a) = 1 \quad ; \quad \log_a \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$$

A. Nessuna

B. Una

C. Due

D. Tre

E. Tutte

Funzioni; logaritmi.

Esaminiamo le quattro uguaglianze una per una. Si suppone sempre $a > 0$, $a \neq 1/2$, $a \neq 1$ (ossia: a è una base ammissibile per i logaritmi indicati nel testo).

Per definizione di logaritmo,

$$\log_{2a} a = \frac{1}{2} \quad \text{equivale a} \quad (2a)^{1/2} = a$$

che ovviamente in generale è *falsa* (essendo verificata solo per $a = 2$). Analogamente,

$$\log_{\sqrt{a}} \frac{1}{a} = -2 \quad \text{equivale a} \quad \left(\sqrt{a}\right)^{-2} = \frac{1}{a}$$

che invece è *vera*. Per la terza uguaglianza, osserviamo che per le proprietà dei logaritmi

$$\log_a a^2 = 2$$

e

$$\log_{a^2} a = \frac{\log_a a}{\log_a a^2} = \frac{1}{2}$$

quindi

$$\left(\log_a a^2\right)(\log_{a^2} a) = 1$$

è *vera*. Infine,

$$\log_a \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{equivale a} \quad a^{1/2} = \frac{a}{2}$$

che in generale è *falsa*. Quindi, delle quattro identità proposte, due sono vere e due false; la risposta esatta è perciò la C.

Definizione e proprietà dei logaritmi; proprietà delle potenze.

---

42. Indicato con x un angolo la cui misura in radianti può variare tra 0 e 2π, l'equazione

$$\sin x + \cos x = 0$$

ammette

A. quattro soluzioni

B. due soluzioni

C. una soluzione

D. otto soluzioni

E. nessuna soluzione

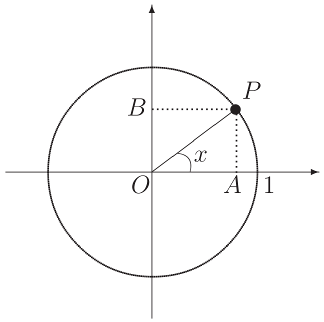
Funzioni; equazioni trigonometriche.

L'equazione è equivalente a

$$\sin x = -\cos x$$

che, per angoli x al primo giro (cioè tra 0 rad e 2π rad), ha le due soluzioni $x = 3\pi/4$ e $x = 7\pi/4$.

Per rendersene conto, basta pensare alla circonferenza trigonometrica (v. figura) e al significato di seno come ordinata ($= \overline{OB}$) e di coseno come ascissa ($= \overline{OA}$) del punto P mobile su tale circonferenza. Allora, gli angoli che soddisfano $\sin x = -\cos x$ sono quelli delle bisettrici del secondo e del quarto quadrante, che sono le uniche semirette che individuano i punti P aventi ascissa e ordinata opposte. Quindi la risposta esatta è la B.



Definizione delle funzioni trigonometriche $\sin x$ *e* $\cos x$*, circonferenza trigonometrica.*

---

43. Tutte le soluzioni reali dell'equazione

$$\tan 2x = -\tan\frac{\pi}{3}$$

sono date da $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$

B. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

C. $x = (-1)^k\,\frac{\pi}{6} + k\pi$

D. $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$

E. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$

Funzioni; equazioni trigonometriche.

Poiché la funzione $\tan x$ è dispari (cioè $\tan(-x) = -\tan x$) e π-periodica (cioè $\tan(x + k\pi) = \tan x$ per $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$), l'equazione equivale a

$$\tan 2x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

e quindi a

$$2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

ossia $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$. La risposta esatta quindi è la D.

Probabilmente alcuni (o molti) studenti possono aver ragionato così: $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$ (è un valore notevole), e l'equazione elementare $\tan 2x = -\sqrt{3}$ ha soluzioni $2x = 2\pi/3 + k\pi$ perché la tangente di $2\pi/3$ (cioè $120°$) è appunto l'opposta della tangente di $\pi/3$ (cioè $60°$). Quindi le soluzioni risultano $x = \pi/3 + k\pi/2$; ma questa espressione non c'è fra le cinque risposte!

(In realtà essa c'è: dev'essere la D, come sappiamo dal precedente svolgimento.)

In una situazione del genere lo studente, se sicuro dei propri conti, *deve* poter trasformare il proprio risultato in uno di quelli proposti. Ciò si fa provando a calcolare quanto fa $\dfrac{\pi}{3} \pm \dfrac{\pi}{2}$: in particolare si trova che $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{6}$, il che significa

$$x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + (k+1)\,\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} + h\frac{\pi}{2}$$

dove $h = k + 1$ è un arbitrario intero relativo (essendo arbitrario k). Si perviene così alla D.

Proprietà della funzione $\tan x$.

---

44. L'espressione

$$7^{2+\log_7 x}$$

è uguale a

A. $7x$

B. $49 \log_7 x$

C. $7^2 + x$

D. $49x$

E. $49 + \log_7 x$

👁 *Funzioni; logaritmi.*

✎ Per le proprietà delle potenze e la definizione di logaritmo si ha

$$7^{2+\log_7 x} = 7^2 \times 7^{\log_7 x} = 49x$$

La risposta esatta è la D.

⚓ *Definizione di logaritmo; proprietà delle potenze.*

---

45. L'equazione

$$\log_{10}(4x) + \log_{10}(9x) = 2$$

è verificata per

A. $x = \dfrac{100}{13}$

B. $x = \dfrac{20}{13}$

C. $x = \dfrac{100}{36}$

D. $x = \dfrac{10}{6}$

E. $x = \pm\dfrac{10}{6}$

Funzioni; equazioni logaritmiche.

L'equazione ha senso purché $x > 0$, ed in tal caso si riscrive (per le proprietà dei logaritmi) come

$$\log_{10}\left[(4x)(9x)\right] = 2$$

Passando agli esponenziali in base 10 si ha

$$36x^2 = 10^2$$

e passando alle radici quadrate (ricordiamo che $x > 0$)

$$6x = 10 \qquad \text{da cui} \qquad x = \frac{10}{6}$$

Quindi la risposta esatta è la D.

Tra le risposte sbagliate, tutte dovute a errori di calcolo, è insidiosa la E perché risolvendo l'equazione $36x^2 = 10^2$ si ha $x = \pm 10/6$: bisogna ricordarsi, però, che la radice negativa va scartata per la condizione di esistenza $x > 0$ nell'equazione di partenza.

Proprietà dei logaritmi; risoluzione di equazioni logaritmiche.

---

46. In figura è riportata una parte del grafico di una delle seguenti funzioni. Quale?

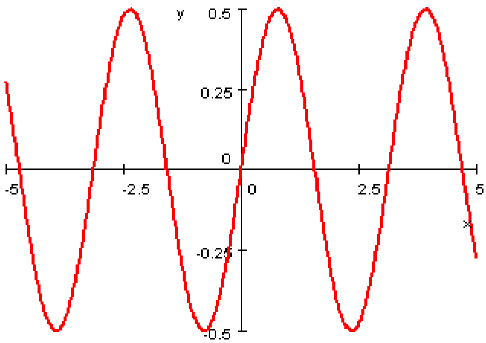
A. $y = \sin x \cos x$

B. $y = \sin 2x$

C. $y = \sin x$

D. $y = \cos 2x$

E. $y = \dfrac{1}{2} \sin x$



Funzioni; funzioni trigonometriche.

Ispezionando il grafico, si osserva che $-5 \leq x \leq 5$ e che i corrispondenti valori della funzione oscillano tra $-0,5$ e $0,5$. Quindi

la funzione B è da scartare perché, ad es., $\sin 2x = 1$ per $x = \pi/4 \simeq 0,75$;

la funzione C è da scartare perché, ad es., $\sin x = 1$ per $x = \pi/2 \simeq 1,57$;

la funzione D è da scartare perché, ad es., $\cos 2x = 1$ per $x = 0$.

La figura mostra anche che la funzione ha un grafico di tipo sinusoidale il cui periodo *non è* 2π. Quindi

la funzione E è da scartare perché ha periodo 2π.

Perciò tutte le funzioni vanno escluse tranne la A, e la risposta esatta è A.

Grafici di funzioni di tipo sinusoidale; periodicità.

---

47. Si consideri la seguente equazione per i valori reali della variabile x

$$8^{(3x-1)/3} = 4^{(3x+1)/2}$$

L'equazione data ha

A. una soluzione

B. due soluzioni

C. infinite soluzioni

D. nessuna soluzione

E. quattro soluzioni

Funzioni; equazioni esponenziali.

Esprimiamo ambo i membri come potenze di 2, e poi uguagliamo gli esponenti

$$\begin{aligned}\left(2^3\right)^{(3x-1)/3} &= \left(2^2\right)^{(3x+1)/2}\\ 2^{3x-1} &= 2^{3x+1}\\ 3x-1 &= 3x+1 \qquad \text{impossibile}\end{aligned}$$

Quindi la risposta esatta è la D.

Proprietà delle potenze; risoluzione di equazioni esponenziali.

---

48. Il *minimo* periodo della funzione

$$y = \cos^2 x$$

è

A. π^2

B. $(2\pi)^2$

C. 2π

D. 4π

E. π

Funzioni; funzioni trigonometriche.

Partiamo dalla nota proprietà che la funzione trigonometrica fondamentale $\cos x$ è periodica con periodo 2π, cioè $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Elevando questa identità al quadrato, si ha

$$\cos^2(x + 2\pi) = \cos^2 x$$

e quindi vediamo che la funzione $\cos^2 x$ è certamente periodica con periodo 2π. Il valore 2π è riportato nella risposta C, ma (attenzione!) la domanda chiede il periodo *minimo* di $\cos^2 x$. Si tratta allora di controllare se i numeri riportati nelle altre risposte corrispondono a periodi più piccoli di 2π. Esaminiamoli ad uno ad uno.

A, B, D. È $\pi^2 \simeq 9$, $(2\pi)^2 \simeq 36$, $4\pi \simeq 12$, quindi le risposte A, B, D sono da scartare perché (anche ammesso che esse forniscano dei periodi di $\cos^2 x$, cosa comunque non vera) i numeri che riportano sono maggiori di $2\pi \simeq 6$.

E. Si ha $\cos(x + \pi) = -\cos x$ (angoli che differiscono di π hanno coseni opposti), quindi elevando al quadrato

$$\cos^2(x + \pi) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x$$

e π risulta effettivamente un periodo per la funzione $\cos^2 x$. La risposta esatta è dunque la E.

Per rispondere al quesito non è stato necessario *dimostrare* che π è il minimo periodo della funzione $\cos^2 x$, ma è bastato scoprire quale fra i numeri riportati nelle cinque risposte è il periodo più piccolo. Comunque, una possibile dimostrazione di tale proprietà è la seguente. Scriviamo (formula di duplicazione)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Allora i periodi di $\cos^2 x$ e di $\cos 2x$ coincidono, e dal fatto (noto) che il minimo periodo della funzione $\cos x$ è 2π, segue che il minimo periodo di $\cos 2x$, e quindi di $\cos^2 x$, è π:

$$\cos 2x = \cos(2x + 2\pi) = \cos 2(x + \pi)$$

Definizione di periodo delle funzioni trigonometriche; calcolo di periodi.

---

49. La disequazione

$$\log_2(x-1) - \log_2(3-x) < 2$$

è verificata per

A. $x < \frac{5}{2}$

B. $1 < x < 3$

C. $2 < x < 3$

D. $1 < x < 2$

E. $x < 2$ oppure $x > 3$

Funzioni; disequazioni logaritmiche.

Le espressioni scritte hanno senso purché gli argomenti dei logaritmi siano positivi, quindi imponiamo subito le condizioni $x > 1$ e $x < 3$, ossia: $1 < x < 3$. Sotto quest'ipotesi si può riscrivere la disequazione, usando le proprietà dei logaritmi, nella forma equivalente

$$\log_2\left(\frac{x-1}{3-x}\right) < 2$$

e quindi, passando agli esponenziali in base 2,

$$\frac{x-1}{3-x} < 2^2$$

Poiché $3 - x > 0$, questa è equivalente a

$$\begin{aligned} x - 1 &< 4(3 - x) \\ 5x &< 13 \\ x &< \frac{13}{5} \end{aligned}$$

che, confrontata con le condizioni di esistenza $1 < x < 3$, restringe le soluzioni a $1 < x < 13/5$.

Ma questo intervallo di soluzioni non c'è, tra le risposte proposte! Tuttavia, la D è l'unica ad offrire un intervallo *contenuto* in quello delle soluzioni. In altre parole: è vero che *se* $1 < x < 2$, allora è anche $1 < x < 13/5$ e quindi la disequazione è verificata. (Anche se non è vero che la disequazione sia verificata *solo se* $1 < x < 2$). Viceversa, tutte le altre risposte propongono condizioni che non implicano che sia $1 < x < 13/5$, e quindi non implicano che la disequazione sia verificata. Pertanto la risposta esatta è la D.

⚓ *Risoluzione di disequazioni logaritmiche; implicazioni tra condizioni.*

---

50. La disequazione

$$3^{1+x} - 3^{1-x} > 8$$

è verificata per

A. $x > 1$

B. $x < -\dfrac{1}{3}$ oppure $x > 3$

C. $x = 2$

D. $-1 < x < 1$

E. $x > \log_9 8$

Funzioni; disequazioni esponenziali.

Riscriviamo la disequazione nella forma

$$3 \times 3^x - \frac{3}{3^x} > 8$$

e quindi, ponendo $t = 3^x$ e ricordando che $t > 0$,

$$\begin{aligned} 3t - \frac{3}{t} &> 8 \\ 3t^2 - 8t - 3 &> 0 \end{aligned}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado in t, si trova

$$t < -\frac{1}{3} \qquad \text{oppure} \qquad t > 3$$

Ritornando alla x, si ha

$$3^x < -\frac{1}{3} \qquad \text{impossibile}$$

oppure

$$3^x > 3 \qquad \text{da cui} \qquad x > 1$$

Le soluzioni della disequazione sono quindi $x > 1$ e la risposta esatta è la A.

Risoluzione di disequazioni esponenziali e di disequazioni algebriche di secondo grado.

---

51. La disequazione

$$2 - |\log_3 x| > 0$$

è verificata per

A. $x > 0$

B. $x < \frac{1}{9}$ oppure $x > 9$

C. $x = 1$

D. $\frac{1}{9} < x < 9$

E. $|x| > \log_3 2$

Funzioni; disequazioni logaritmiche, disequazioni con termini in valore assoluto.

✎ Bisogna anzitutto imporre che sia $x > 0$ (perché abbia senso il logaritmo). Quindi risolviamo la disequazione così:

$$\begin{aligned} 2 - |\log_3 x| &> 0 \\ |\log_3 x| &< 2 \end{aligned}$$

cioè

$$-2 < \log_3 x < 2$$

e, passando all'esponenziale in base 3,

$$3^{-2} < x < 3^2$$

$$\frac{1}{9} < x < 9$$

Tali soluzioni sono compatibili con la condizione di esistenza $x > 0$. Quindi la risposta esatta è la D.

⚓ *Risoluzione di disequazioni logaritmiche e di disequazioni contenenti valori assoluti, con discussione del modulo.*

---

52. Indicato con x un angolo la cui misura in radianti può variare tra 0 e 2π, l'equazione

$$\sin x - \cos^2 x = 1$$

ammette

A. quattro soluzioni

B. due soluzioni

C. una soluzione

D. infinite soluzioni

E. nessuna soluzione

👁 *Funzioni; equazioni trigonometriche.*

Sfruttando l'dentità fondamentale $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, l'equazione si riscrive come equazione di secondo grado in $\sin x$

$$\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$$

Scomponendo il trinomio $t^2 + t - 2 = (t-1)(t+2)$, l'equazione diventa

$$(\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$$

che porta a

$$\sin x = -2 \qquad \text{impossibile}$$

oppure a

$$\sin x = 1$$

che, per x compreso tra 0 e 2π, vale se e solo se $x = \pi/2$. La soluzione è dunque unica, e la risposta esatta è la C.

Se uno studente non facesse attenzione alla prima riga del testo, in cui si dice che x varia solo tra 0 e 2π, troverebbe le infinite soluzioni $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, e quindi darebbe la risposta errata D. Al solito, è fondamentale chiedersi in quale insieme si cercano le soluzioni di un'equazione.

Risoluzione di equazioni trigonometriche e di equazioni algebriche di secondo grado.

---

53. Indicato con x un angolo la cui misura in radianti può variare tra 0 e 2π, la disequazione

$$4\sin^2 x > 1$$

è verificata per

A. $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6}$ oppure $\dfrac{7\pi}{6} < x < \dfrac{11\pi}{6}$

B. $x > \dfrac{\pi}{6}$

C. $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{11\pi}{6}$

D. $\dfrac{5\pi}{6} < x < \dfrac{7\pi}{6}$

E. $x < \dfrac{11\pi}{6}$

Funzioni; disequazioni trigonometriche.

La disequazione di partenza è equivalente a

$$\sin^2 x > \frac{1}{4}$$

e quindi a

$$\sin x < -\frac{1}{2} \qquad \text{oppure} \qquad \sin x > \frac{1}{2}$$

Queste due disequazioni trigonometriche elementari hanno complessivamente per soluzioni, quando x è compreso tra 0 e 2π, le seguenti

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$$

(come si vede da un disegno sulla circonferenza trigonometrica). Quindi la risposta esatta è la A.

Risoluzione di disequazioni trigonometriche e di disequazioni algebriche di secondo grado; valori notevoli della funzione $\sin x$.

---

54. Stabilire per quali valori di x esiste il corrispondente valore di y nella seguente funzione

$$y = \frac{\sqrt{4-x}}{\log_5 x}$$

A. Per $0 < x \leq 4$

B. Per $x \neq 1$

C. Per $0 < x < 1$ oppure per $1 < x \leq 4$

D. Per $x > 0$

E. Per ogni x reale

Funzioni; logaritmi, radicali.

Affinché la funzione sia definita occorre che sia

$$\begin{array}{rcll} x & > & 0 & \text{(per l'esistenza del logaritmo);} \\ \log_5 x & \neq & 0 & \text{(perché non si annulli il denominatore)} \quad \text{ossia } x \neq 1; \\ 4 - x & \geq & 0 & \text{(perché il radicando sia non negativo)} \quad \text{ossia } x \leq 4 \end{array}$$

Le condizioni di esistenza si riassumono quindi nelle seguenti

$$0 < x \leq 4 \qquad \text{con} \qquad x \neq 1$$

e la risposta esatta è la C.

Condizioni di esistenza per logaritmi, radicali e quozienti.

---

55. In figura è riportata una parte del grafico di una delle seguenti funzioni. Quale?

A. $y = 2^{-x}$

B. $y = 2^{x}$

C. $y = 2^{|x|}$

D. $y = 2^{-|x|}$

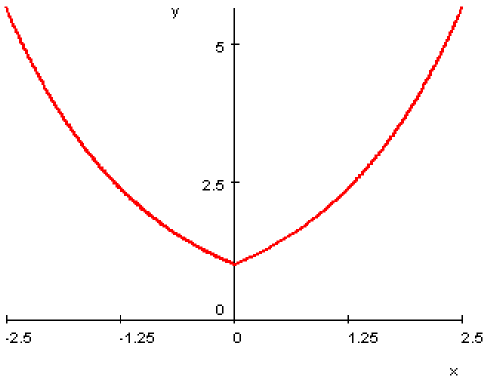
E. $y = 2^{x^2}$

Funzioni; funzioni esponenziali.

Il grafico è simmetrico rispetto all'asse y, il che significa che a valori opposti della x corrispondono uguali ordinate. Quindi A e B sono da scartare (ad es., $2^{-3} \neq 2^{3}$).

Per $x > 0$ la funzione del grafico cresce, quindi non può essere la D (ad es., è $3 < 4$ mentre $2^{-3} > 2^{-4}$).

Rimangono la C e la E. Per $x = 2$ la funzione in E vale $2^{2^2} = 16$, e questa ordinata non è compatibile con quelle del grafico. Quindi la risposta esatta è la C.



Grafici di funzioni di tipo esponenziale; simmetrie sui grafici.

---

56. L'espressione

$$\cos(\sin x)$$

con x numero reale

A. è identicamente uguale ad x

B. equivale a $\sin(\cos x)$

C. è sempre positiva

D. è un modo abbreviato per scrivere $(\cos x)(\sin x)$

E. ha senso solo per $-1 \leq x \leq 1$

Funzioni; funzioni trigonometriche.

La scrittura $\cos(\sin x)$ denota il coseno dell'angolo (espresso in radianti!) $\alpha = \sin x$. Per ogni x reale si ha $-1 \leq \sin x \leq 1$; quindi dobbiamo considerare $\cos\alpha$ per $-1 \leq \alpha \leq 1$. Poiché l'angolo di 1 radiante, sulla circonferenza trigonometrica, si trova nel primo quadrante (1 rad corrisponde a $\dfrac{180°}{\pi}$ gradi, cioè a poco meno di 60°), la condizione

$-1 \leq \alpha \leq 1$ implica che α sia un angolo nel primo o quarto quadrante, perciò il suo coseno è sempre positivo. Quindi $\cos(\sin x) > 0$ per ogni x, e la risposta esatta è la C.

Proprietà delle funzioni $\sin x$ *e* $\cos x$*; composizione di funzioni.*

---

57. Se $\pi/4 \leq \alpha < \beta \leq \pi$, allora si ha

A. $\cos\alpha > \cos\beta$

B. $\cos\alpha < \sin\beta$

C. $\sin\alpha > \sin\beta$

D. $\cos\alpha < \cos\beta$

E. $\sin\alpha < \sin\beta$

Funzioni; funzioni trigonometriche.

Ragionando sul significato delle funzioni seno e coseno sulla circonferenza trigonometrica, si vede subito che per angoli compresi tra $\pi/4$ rad e π rad la funzione coseno è decrescente, quindi la risposta A è vera.

La risposta D afferma che il coseno è crescente, il che contraddice A, mentre tutte le altre risposte affermano relazioni non necessariamente vere per angoli compresi tra $\pi/4$ e π.

Misura degli angoli in radianti, definizione e andamento delle funzioni $\sin x$ *e* $\cos x$*.*

Capitolo 4

Geometria

58. Se si attraversa un'aiuola rettangolare lungo la diagonale, anziché percorrerne i due lati, quanto percorso si risparmia al massimo?

A. Non più del 10%

B. Circa il 30%

C. Circa il 40%

D. Il 50%

E. Più del 60%

Geometria sintetica piana; rettangoli.

Siano a, b le lunghezze dei lati del rettangolo; la diagonale è lunga $\sqrt{a^2+b^2}$ (per il teorema di Pitagora), mentre se si percorrono i due lati si percorre una lunghezza $a+b$. Un momento di riflessione su qualche figura di rettangolo ci convince che il *massimo risparmio* si ha nel caso in cui il rettangolo è un quadrato (viceversa, se il rettangolo avesse un lato molto più lungo dell'altro, diciamo $a \gg b$, la diagonale sarebbe quasi uguale alla somma dei due lati perché $\sqrt{a^2+b^2} \simeq a \simeq a+b$, ed il vantaggio sarebbe minimo). Nel caso del quadrato, la somma dei due lati vale $2a$, la diagonale vale $a\sqrt{2}$, il risparmio assoluto di percorso è $2a-\sqrt{2}a$, ed il risparmio percentuale è

$$\frac{2a-\sqrt{2}a}{2a} \times 100 \simeq \frac{2-1,4}{2} \times 100 \simeq 30\%$$

Quindi la risposta esatta è la B.

Il punto chiave per rispondere a questa domanda consiste nel *non cercare* di fare il calcolo esatto del risparmio percentuale nel caso generico, ma "indovinare" qual è la configurazione geometrica in cui tale risparmio percentuale è massimo, e poi fare il calcolo del risparmio percentuale solo in questa situazione. A sua volta, per indovinare qual è la situazione migliore, in questo caso la cosa più facile è indovinare qual è la *peggiore* (il rettangolo con un lato zero, che possiamo vedere come caso limite di rettangolo con un lato lunghissimo e uno cortissimo) e poi considerare la situazione più lontana possibile da questa: lati uguali, ossia quadrato. Naturalmente, questo modo di procedere non ha validità generale.

⚓ *Diagonale del quadrato, valore approssimato di $\sqrt{2}$, ragionamenti su problemi sintetici di massimo e minimo, significato di "risparmio percentuale".*

---

59. Un triangolo rettangolo ha perimetro lungo 12 cm. Allora i suoi due cateti sono lunghi

A. 1 e 2 cm

B. 2 e 3 cm

C. 3 e 4 cm

D. 4 e 5 cm

E. 5 e 6 cm

👁 *Geometria sintetica piana; triangoli rettangoli.*

✎ Se a e b sono i cateti, $\sqrt{a^2+b^2}$ è l'ipotenusa (per il teorema di Pitagora) e $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ è il perimetro. Basta allora calcolare il perimetro in funzione dei due cateti per ciascuna delle cinque risposte, e vedere quando si trova 12. Oppure, più semplicemente, ci si ricorda della familiare "terna pitagorica" $3, 4, 5$: poiché $3^2+4^2=5^2$ e $3+4+5=12$, la risposta C è esatta.

⚓ *Teorema di Pitagora, terne pitagoriche.*

---

60. Una sola delle seguenti figure geometriche non è convessa. Quale?

A. Poligonale

B. Cerchio

C. Semipiano

D. Segmento

E. Retta

Geometria sintetica piana; convessità.

Un insieme è *convesso* quando, presi comunque due suoi punti, tutto il segmento che li unisce è contenuto nell'insieme. In base a questa definizione si vede subito che cerchio, semipiano, segmento e retta sono insiemi convessi. Una poligonale, invece, in generale non lo è, salvo il caso banale in cui sia contenuta in una retta. Quindi la risposta esatta è la A.

Definizione di insieme convesso.

---

61. Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, consideriamo i punti $P(5,0)$, $Q(5,-5)$, $R(0,-5)$, $S(-3,-4)$ e $T(-5,5)$. Quale delle seguenti terne è formata da punti appartenenti alla medesima circonferenza che ha centro nell'origine?

A. P, Q, R

B. Q, R, T

C. P, R, S

D. Q, S, T

E. P, R, T

Geometria analitica piana; circonferenza.

La domanda equivale a:

"Quale delle seguenti terne è formata da punti aventi la stessa distanza dall'origine?"

Perciò basta calcolare la distanza dall'origine ($= \sqrt{x^2+y^2}$, per il teorema di Pitagora) di ciascuno dei punti (x, y); si trova

$$\overline{OP} = 5; \quad \overline{OQ} = 5\sqrt{2}; \quad \overline{OR} = 5; \quad \overline{OS} = 5; \quad \overline{OT} = 5\sqrt{2}$$

perciò la risposta esatta è la C.

Definizione di circonferenza come luogo geometrico; formula della distanza tra due punti.

---

62. Quando è possibile che tre punti A, B, C del piano verifichino la proprietà che la somma delle distanze di A da B e di A da C sia uguale alla distanza di B da C?

A. Mai

B. Sempre

C. Quando i tre punti sono allineati opportunamente

D. Quando A appartiene all'ellisse di cui B e C sono i fuochi

E. Quando i tre punti sono i vertici di un opportuno triangolo isoscele

Geometria sintetica piana; segmenti.

Tre punti A, B, C nel piano sono vertici di un triangolo, salvo il caso in cui sono allineati.

Consideriamo prima il caso in cui A, B, C sono vertici di un triangolo (non ridotto a un segmento, cioè i vertici non sono allineati): allora, la somma di due lati qualsiasi è strettamente maggiore del terzo lato ("disuguaglianza triangolare"): dunque $\overline{AB}+\overline{AC} > \overline{BC}$. Poiché la domanda richiede invece che sia $\overline{AB}+\overline{AC} = \overline{BC}$, ne segue che i tre punti *devono* essere allineati.

Se B, A, C sono allineati e A è punto medio di BC, effettivamente $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC}$; dunque la risposta esatta è la C.

Proprietà elementari dei triangoli e delle distanze.

---

63. Si considerino un quadrato Q ed un esagono regolare E inscritti nel medesimo cerchio. Indicati con $A(Q)$ e $A(E)$ le rispettive aree e con $P(Q)$ e $P(E)$ i rispettivi perimetri, si ha

A. $P(E) < P(Q)$

B. $A(E) > A(Q)$

C. $A(E) = A(Q)$

D. $A(E) = \frac{3}{2}A(Q)$

E. $P(E) = P(Q)$

Geometria sintetica piana; cerchio e poligoni inscritti.

Indichiamo con $p\,(n)$ e $A\,(n)$, rispettivamente, il perimetro e l'area del poligono regolare di n lati inscritti in un cerchio fissato. È noto (e comunque evidente: ci si convinca facendo qualche figura) che i perimetri $p\,(n)$ aumentano al crescere di n, approssimando sempre meglio, per difetto, la lunghezza della circonferenza, e analogamente le aree $A\,(n)$ crescono al crescere di n, approssimando sempre meglio, per difetto, l'area del cerchio. Questo, anzi, è uno dei procedimenti che si possono usare, in geometria elementare, per *definire* la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio.

In particolare, allora, si avrà

$$\begin{aligned} P\,(E) &= p\,(6) > p\,(4) = P\,(Q)\,, \\ A\,(E) &= A\,(6) > A\,(4) = A\,(Q) \end{aligned}$$

Dunque la risposta B è sicuramente corretta, mentre A, C, E sono evidentemente false.

Potrebbe restare il dubbio che sia corretta anche la D (non abbiamo calcolato esplicitamente le due aree e non ne conosciamo il rapporto), ma a questo punto la D si esclude per la logica del test: se D fosse corretta ci sarebbero due risposte esatte (D e B), il che sicuramente non accade. In definitiva, la risposta esatta è la B.

(Lo studente curioso calcoli esplicitamente – ad esempio, in funzione del raggio r della circonferenza – i numeri $A(Q)$, $A(E)$, e verifichi che la relazione $A(E) = \frac{3}{2}A(Q)$ è effettivamente falsa).

⚓ *Aree e perimetri dei poligoni inscritti in un cerchio; procedimento di approssimazione con cui si definiscono la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio.*

---

64. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, la distanza del punto di coordinate $(2, 1)$ dalla retta di equazione $x + y + 1 = 0$ è

A. 4

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

E. 1

👁 *Geometria analitica piana; distanza tra un punto e una retta.*

✎ È sufficiente applicare la formula per la distanza di un punto da una retta: se la retta r ha equazione

$$ax + by + c = 0$$

la distanza del punto (x_0, y_0) da r è data da

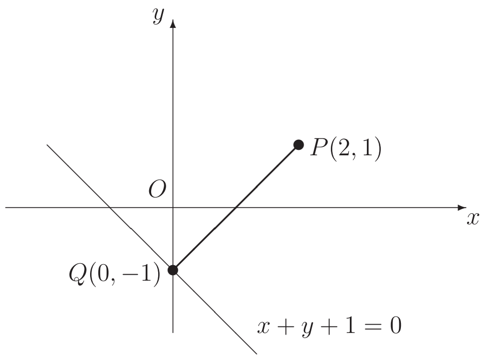
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

In questo caso

$$d = \frac{|2 + 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Quindi la risposta esatta è la D.

Se capitasse di non ricordare la formula della distanza, il quesito si può comunque risolvere così: una volta rappresentati nel piano cartesiano la retta $x + y + 1 = 0$ (ovvero $y = -x - 1$) e il punto $P(2, 1)$, si tracci la retta che è perpendicolare alla retta data e passa per P.



Come si vede, le due rette si intersecano in $Q(-1, 0)$ (non occorrono calcoli, basta fare il disegno su un foglio quadrettato: la retta $x + y + 1 = 0$ è parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante, per cui la sua perpendicolare per P è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante e perciò passa per Q). Allora la distanza $\overline{PQ}$ è la diagonale di un quadrato di lato 2, cioè vale $2\sqrt{2}$.

Formula per la distanza di un punto da una retta.

---

65. Due circonferenze concentriche hanno diametri rispettivamente uguali a 6 cm e a 2 cm. Qual è l'area della parte di piano compresa tra esse?

A. 4π cm^2

B. 8π cm^2

C. 10π cm^2

D. 16π cm^2

E. 32π cm^2

Geometria sintetica piana; corona circolare.

La "parte di piano compresa tra due circonferenze concentriche" si chiama *corona circolare*, ed ha per area la differenza tra le aree dei due cerchi. Ricordando che l'area di un cerchio di raggio r vale πr^2, poiché le due circonferenze, nel nostro caso, hanno raggi pari a $R = 3$ cm e $r = 1$ cm, l'area della corona circolare sarà uguale a

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi (9 - 1) = 8\pi \text{ cm}^2$$

La risposta esatta quindi è la B.

Formula per il calcolo dell'area del cerchio (e quindi della corona circolare).

---

66. Nel piano il luogo dei punti equidistanti da due rette distinte assegnate è formato da

A. una o due rette, a seconda della posizione reciproca delle rette date

B. una retta

C. due rette perpendicolari

D. una circonferenza

E. un punto

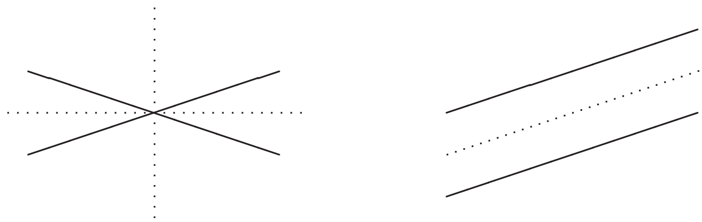
Geometria sintetica piana; rette.

Due rette distinte nel piano generalmente si incontrano in un punto, salvo il caso particolare in cui sono parallele.

Cominciamo a ragionare sul caso delle rette incidenti, e immaginiamo qual è il luogo dei punti equidistanti: sarà la retta bisettrice dell'angolo formato tra le due. Ma in realtà le due rette hanno due bisettrici diverse, a seconda di quale angolo si prenda in considerazione, ed una figura mostra che queste due bisettrici sono tra loro perpendicolari.

Ora chiediamoci se lo stesso vale nel caso delle rette parallele: la retta parallela alle due che giace tra le due ad uguale distanza da entrambe consiste di punti equidistanti alle due rette, mentre in questo caso una retta perpendicolare a questa non soddisfa la stessa proprietà.

La risposta esatta quindi è la A.



Concetto di luogo geometrico; proprietà delle rette nel piano.

67. Siano S l'area di un quadrato ed s l'area del triangolo equilatero costruito sulla sua diagonale. Allora il rapporto $\frac{S}{s}$ vale

A. $3\sqrt{2}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

E. $\sqrt{3}$

Geometria sintetica piana; poligoni.

✎ Se a è il lato del quadrato, è $S = a^2$ e la sua diagonale vale $a\sqrt{2}$ (per il teorema di Pitagora). Il triangolo equilatero di lato $a\sqrt{2}$ ha altezza $h = \left(a\sqrt{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, dunque l'area del triangolo rettangolo è

$$s = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)\left(a\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

Perciò

$$\frac{S}{s} = \frac{a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

e la risposta esatta è la D.

⚓ *Area del quadrato e del triangolo; relazioni lato-diagonale nel quadrato e lato-altezza nel triangolo equilatero.*

---

68. Il rapporto fra le superfici totali del cubo inscritto e di quello circoscritto ad una stessa sfera è

A. $\sqrt{3}/9$

B. $\sqrt{3}/3$

C. $1/3$

D. $1/\sqrt{3}$

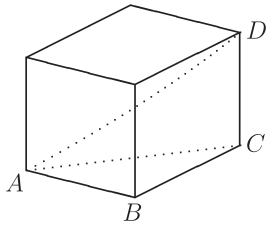
E. $2/3$

👁 *Geometria sintetica dello spazio; sfera e poliedri inscritti e circoscritti.*

✎ Sia r il raggio della sfera. La lunghezza dello spigolo del cubo circoscritto sarà pari al diametro della sfera, $2r$; ogni faccia del cubo quindi ha area $(2r)^2 = 4r^2$; perciò la superficie totale del cubo circoscritto è $S = 6 \times 4r^2 = 24r^2$.
Consideriamo ora il cubo inscritto. In questo caso è la diagonale d del cubo (ossia il

segmento che congiunge due vertici opposti) ad essere uguale al diametro $2r$ della sfera. Detto L lo spigolo del cubo, la sua diagonale misura $d = L\sqrt{3}$, come si vede facendo una figura e calcolando d a partire da L applicando due volte il teorema di Pitagora

$$d = \overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{L^2 + L^2 + L^2} = L\sqrt{3}$$



Quindi lo spigolo del cubo inscritto misura $L = d/\sqrt{3} = 2r/\sqrt{3}$, l'area di una faccia è $\left(2r/\sqrt{3}\right)^2 = 4r^2/3$, e l'area della superficie totale del cubo inscritto è $s = 6 \times 4r^2/3 = 8r^2$. Possiamo ora calcolare il rapporto richiesto

$$\frac{s}{S} = \frac{8r^2}{24r^2} = \frac{1}{3}$$

Perciò la risposta esatta è la C.

Capacità di disegnare (o immaginare) il cubo inscritto e circoscritto a una sfera, per vedere le relazioni tra i rispettivi elementi; calcolo della lunghezza di un segmento nello spazio mediante il teorema di Pitagora in 3 dimensioni; area del quadrato, superficie totale del cubo.

---

69. Si considerino le due sfere S_1 e S_2, la prima inscritta e la seconda circoscritta al medesimo cubo. Allora tra i volumi V_1 e V_2 delle due sfere sussiste la seguente relazione

A. $V_1 = \frac{\sqrt{3}}{9} V_2$

B. $V_2 = \sqrt{2} V_1$

C. $V_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} V_2$

D. $V_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} V_2$

E. $V_1 > V_2$

👁 *Geometria sintetica dello spazio; cubo e sfera inscritta e circoscritta.*

✎ Le prime quattro risposte esprimono un rapporto tra i due volumi, l'ultima dice un'evidente falsità (il volume della sfera inscritta è minore del volume del cubo, che è minore del volume della sfera circoscritta, quindi $V_1 < V_2$, e non viceversa). Dobbiamo perciò calcolare il rapporto tra V_1 e V_2.

Sia L lo spigolo del cubo, e siano R_1 e R_2, rispettivamente, i raggi di S_1 e S_2. Esprimiamo in funzione di L i volumi delle due sfere, poi calcoleremo il rapporto V_1/V_2.

Poiché S_1 è inscritta nel cubo, il suo diametro è uguale ad L, dunque $2R_1 = L$, $R_1 = L/2$ e

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6} L^3$$

Poiché S_2 è circoscritta al cubo, il suo diametro $2R_2$ è uguale alla diagonale del cubo (ossia il segmento che unisce due vertici opposti), che vale $L\sqrt{3}$ (v. quesito n° 68). Quindi $R_2 = L\sqrt{3}/2$ e

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{4}{3}\pi \left(L\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi L^3$$

Perciò

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\pi}{6} L^3}{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi L^3} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

e la risposta esatta è la A.

Formula per il volume della sfera, teorema di Pitagora in 3 dimensioni e considerazioni elementari sulla sfera inscritta e circoscritta a un cubo.

---

70. Nel piano cartesiano ortogonale Oxy si considerino le rette $r : 2x + 3y + k = 0$ ed $s : 6x + ky + 9 = 0$, con k parametro reale.Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A. Per una opportuna scelta di k le rette r ed s sono parallele e distinte

B. Per una opportuna scelta di k le rette r ed s si intersecano nell'origine degli assi

C. Per nessuna scelta di k le rette r ed s sono perpendicolari

D. Soltanto per un numero finito di scelte di k le rette r ed s sono incidenti

E. Per una opportuna scelta di k le rette r ed s sono coincidenti

Geometria analitica piana; rette.

Consideriamo la risposta A. Le due rette sono parallele se i due coefficienti della x e della y di r (2 e 3) risultano proporzionali ai rispettivi coefficienti di s (6 e k). Questo accade se e solo se $k = 9$: per questo valore di k le rette sono parallele e hanno equazioni (semplificando la seconda equazione per 3):

$$2x + 3y + 9 = 0 \qquad \text{e} \qquad 2x + 3y + 3 = 0$$

per cui sono anche distinte. Perciò la risposta A è esatta.

Esaminiamo anche le altre possibili risposte (lo studente avrebbe potuto esaminare le risposte in un ordine diverso, e non avrebbe incontrato subito la risposta esatta).

La B è falsa: per intersecarsi nell'origine le due rette devono anzitutto passare per l'origine, e la s chiaramente non ci passa.

Per quanto riguarda la C, va ricordato che le due rette sono perpendicolari se i prodotti dei due coefficienti della x ($2 \times 6 = 12$) e dei due coefficienti della y ($3 \times k$) sono opposti. Si ha $12 = -3k$ per $k = -4$, e anche la C è falsa.

Per la D, si osservi che per due rette essere "incidenti" significa non essere né "parallele e distinte" né "coincidenti", sicché si può stabilire immediatamente se D è vera o falsa dopo aver esaminato le risposte A ed E e senza dover perdere tempo a fare conti.

La E è falsa per quanto già detto a proposito della A: per coincidere due rette devono anzitutto essere parallele, ma abbiamo visto che nell'unico caso in cui sono parallele ($k = 9$) le rette sono distinte: quindi non coincidono mai.

Infine anche la risposta D è falsa: infatti, se per $k = 9$ le rette sono parallele e distinte, allora per ogni $k \neq 9$ saranno incidenti o coincidenti, e non essendo mai coincidenti si conclude che per un numero *infinito* di valori di k le due rette sono incidenti.

⚓ *Equazione della retta; intersezione tra due rette; condizioni di parallelismo e di perpendicolarità tra due rette.*

---

71. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, sia r la retta di equazione

$$y = \frac{3x+1}{-2}$$

Quale delle seguenti equazioni rappresenta una retta parallela ad r e passante per il punto $(1, 1)$?

A. $y = \dfrac{5-3x}{2}$

B. $y = \dfrac{3}{2}(x-1)+1$

C. $y = 1 + \dfrac{2}{3}(x-1)$

D. $y = -\dfrac{3}{2}x + 1$

E. $y = \dfrac{2}{3}x + 1$

👁 *Geometria analitica piana; rette.*

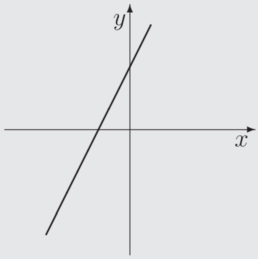
✎ Delle 5 rette proposte, solo la A e la D hanno pendenza uguale a quella della retta data (cioè $-3/2$), quindi B, C ed E sono false.

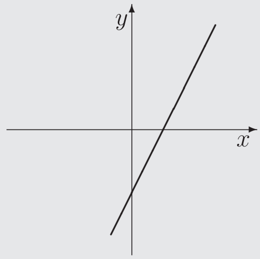
Per decidere quale tra A e D è la risposta vera, basta controllare il passaggio per $(1, 1)$: sostituendo $x = 1$ in ciascuna equazione, si trova $y = 1$ nel caso A e $y \neq 1$ nel caso D, quindi D è falsa e la risposta esatta è la A.

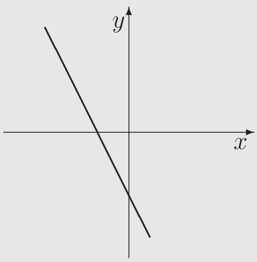
Equazione della retta determinata assegnando direzione e passaggio per un punto.

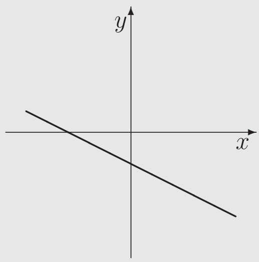
---

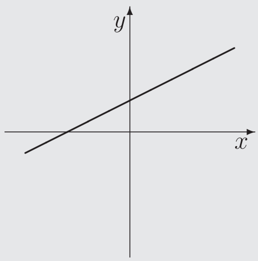
72. Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, quale tra le seguenti è la retta di equazione $4x - 2y + 1 = 0$?

A.


B.


C.


D.


E.


Geometria analitica piana; rette.

Riscriviamo l'equazione nella forma $y = mx+q$, ossia $y = 2x+1/2$. La retta ha pendenza

2 (crescente, più ripida di 45°), e taglia l'asse y nel punto $(0, 1/2)$. Dunque la risposta esatta è A.

☞ Le rette disegnate in C e D sono decrescenti, cioè hanno coefficiente angolare $m < 0$; quella in E ha coefficiente angolare positivo ma minore di 1 (è meno ripida di 45°); quella in B taglia l'asse y in un punto di ordinata negativa, cioè ha $q < 0$.

⚓ *Significato geometrico dei parametri m e q nell'equazione della retta $y = mx + q$.*

---

73. Una parabola e una circonferenza possono avere in comune al massimo

A. un arco

B. quattro punti

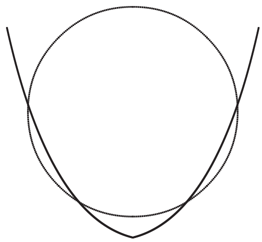
C. due punti

D. un punto

E. cinque punti se il fuoco della parabola coincide con il centro della circonferenza

👁 *Geometria analitica; coniche.*

✎ Dalla geometria analitica è noto che una conica è completamente individuata da 5 punti, il che significa che se due coniche hanno 5 punti in comune, coincidono. D'altro canto una parabola e una circonferenza non possono coincidere, quindi le risposte A (che implica infiniti punti in comune) ed E sono sbagliate. In generale, due coniche distinte possono avere in comune fino a quattro punti. Si tratta di capire se nel caso particolare di una circonferenza e di una parabola può accadere che le intersezioni siano effettivamente quattro. Anche senza ricordare particolari teoremi che affermino che questo è possibile, una semplice figura mostra che ciò può capitare.



Dunque la risposta esatta è la B.

(Si noti che la risposta B afferma che le intersezioni sono al massimo quattro, senza escludere quindi che talvolta siano di meno).

Equazione di una conica, condizioni che la determinano, intersezione tra due coniche.

---

74. Nel piano cartesiano ortogonale Oxy il luogo dei punti di coordinate (x, y) che verificano la condizione

$$x^2 - 1 = 0$$

A. è formato da un unico punto

B. è formato dai punti di una parabola

C. è formato da infiniti punti

D. è formato da due soli punti

E. è indeterminato perché la condizione data non consente di determinare l'ordinata dei punti del luogo

Geometria analitica piana; riconoscimento di luoghi descritti da equazioni.

✎ L'equazione $x^2 - 1 = 0$ ha per soluzioni $x = 1$ e $x = -1$, che rappresentano due rette verticali. Il luogo geometrico consiste quindi di infiniti punti, e la risposta esatta è la C.

☞ Commentiamo brevemente le risposte errate D ed E.

La D può indurre in errore se si dimentica che si sta lavorando nel piano (x, y): certamente, vista come equazione algebrica in x, l'equazione $x^2 - 1 = 0$ ha due soluzioni $x = \pm 1$; tuttavia, nel piano ognuna di queste *non* rappresenta un punto (o un numero) ma una retta.

Analogamente, la E contiene un errore insidioso. Un'equazione algebrica (o un sistema di equazioni) si dice "indeterminata" se ammette infinite soluzioni; qui stiamo però affrontando il *problema geometrico* di individuare il *luogo dei punti* che soddisfano una certa equazione, e questo luogo consiste di due rette. L'insieme dei punti di due rette è un insieme di infiniti punti, e pertanto è ovvio che l'ordinata del generico punto di tale insieme sia variabile; ciò non significa affatto che il luogo stesso sia indeterminato!

⚓ *Nozione di luogo geometrico individuato da un'equazione; equazione della retta.*

---

75. Dato un triangolo equilatero siano S l'area del cerchio circoscritto ed s l'area del cerchio inscritto. Allora

A. $S = 2s$

B. $S = 4s$

C. $3S = 4s$

D. il rapporto S/s dipende dalla lunghezza del lato del triangolo

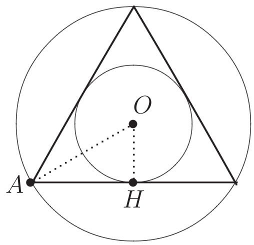
E. le superfici dei due cerchi sono grandezze fra loro incommensurabili

👁 *Geometria sintetica piana; triangolo equilatero e cerchio inscritto e circoscritto.*

Tutte le risposte riguardano il valore del rapporto S/s; in particolare la E significa che tale rapporto è un numero irrazionale. Detti R il raggio del cerchio circoscritto e r il raggio del cerchio inscritto, si ha

$$\frac{S}{s} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

Per calcolare R/r conviene fare un disegno, tenendo presente che per il triangolo equilatero i cerchi inscritto e circoscritto sono concentrici. Chiamiamo O il loro centro comune.



Ricordiamo inoltre che nel caso del triangolo equilatero O è anche punto di incontro delle altezze, delle bisettrici e delle mediane. Ne segue che il triangolo di vertici A, H, O (dove $\overline{AO} = R$, $\overline{OH} = r$) è un triangolo con angoli di 30°, 60°, 90°, ossia è la metà di un triangolo equilatero, per cui $R = 2r$. In conclusione $R/r = 2$ e perciò la risposta esatta è la B.

Area del cerchio; concetto di cerchio inscritto e circoscritto ad un triangolo; punti notevoli del triangolo; proprietà dei triangoli di 30°, 60°, 90°.

---

76. Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, consideriamo le circonferenze c di centro $O = (0,0)$ e raggio 2 e c' di centro O' e raggio 3. Le circonferenze c e c' si intersecano in due punti. Tra i seguenti punti, quale può essere O'?

A. $(3,4)$

B. $(5,-2)$

C. $\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$

D. $\left(1, \frac{9}{2}\right)$

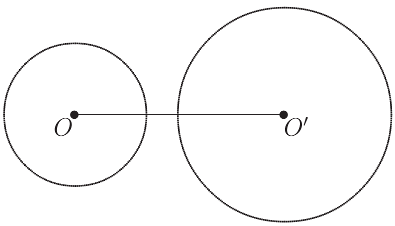
E. $(-4,-4)$

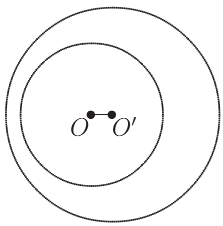
Geometria analitica piana; circonferenza.

La geometria elementare insegna che

> "Due circonferenze si intersecano in due punti quando la distanza tra i due centri è minore della somma dei due raggi e maggiore della differenza tra i due raggi"

In questo caso i raggi valgono 2 e 3, quindi la distanza $d = \overline{OO'}$ tra i centri deve soddisfare $1 < d < 5$. Allo stesso risultato si perviene naturalmente anche se non si ricorda la proprietà prima enunciata, ma si riflette sulla posizione reciproca che devono avere le due circonferenze per *non* intersecarsi in due punti (magari aiutandosi con un disegno): esse devono essere esterne (e allora è $d \geq 5$) oppure l'una interna all'altra (per cui è $d \leq 1$).





Poiché uno dei due centri è l'origine, si tratta di individuare tra i cinque punti (x,y) proposti quello per cui la distanza $\sqrt{x^2+y^2}$ dall'origine è compresa tra 1 e 5. Anzi, per non calcolare radici quadrate, cerchiamo per quale di questi punti vale la condizione

$$1 < x^2 + y^2 < 25$$

A: $x^2 + y^2 = 25$
B: $x^2 + y^2 = 29$
C: $x^2 + y^2 = 242/9 \simeq 26,9$
D: $x^2 + y^2 = 85/4 = 21,25$
E: $x^2 + y^2 = 32$
L'unico punto che soddisfa le condizioni chieste è il D. La risposta esatta quindi è la D.

Posizioni relative di due circonferenze; distanza tra due punti.

---

77. Un cocomero perfettamente sferico viene tagliato in 16 fette uguali. Se il diametro del cocomero è di 20 cm, il volume di ciascuna fetta è di

A. $\frac{1000}{12}\pi$ cm^3

B. $\frac{20^3}{16}\pi$ cm^3

C. $\frac{\pi}{128}$ cm^3

D. $\frac{\pi^3}{128}$ cm^3

E. $\frac{5}{16}\pi$ cm^3

Geometria sintetica dello spazio; sfera.

Il volume della sfera di raggio R è $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. In questo caso il diametro è 20 cm, quindi $R = 10$ cm, e $V = \frac{4}{3}\pi 10^3$ cm^3. Il volume di ua singola fetta sarà $1/16$ di questo, cioè

$$\frac{1}{16} \times \frac{4}{3}\pi 10^3 = \frac{1000}{12}\pi \text{ cm}^3$$

La risposta esatta è quindi la A.

⚓ *Formula per il volume della sfera.*

---

78. In una circonferenza di raggio unitario è inscritto un triangolo avente un lato uguale al diametro. Si dica quali fra le seguenti sono le lunghezze a e b degli altri due lati del triangolo.

A. $a = 1$, $b = 1$

B. $a = \dfrac{1}{5}$, $b = \dfrac{2}{5}$

C. $a = \dfrac{3}{2}$, $b = \dfrac{3}{4}$

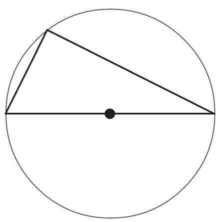
D. $a = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $b = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

E. $a = \dfrac{6}{5}$, $b = \dfrac{8}{5}$

Geometria sintetica piana; triangolo e cerchio circoscritto.

Ricordiamo il teorema che dice

> "Un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo, con l'ipotenusa uguale al diametro della circonferenza"



Dire (come nel testo del quesito) che il triangolo, inscritto in una circonferenza, ha un lato uguale al diametro, significa proprio questo, perciò il nostro triangolo è rettangolo, e l'ipotenusa è uguale al diametro, quindi ha lunghezza 2 (perché il raggio ha lunghezza 1). Per il teorema di Pitagora, la somma dei quadrati dei due cateti a e b deve allora valere 4 (cioè il quadrato dell'ipotenusa). Si tratta dunque di controllare, in ciascuna risposta, se vale l'uguaglianza $a^2 + b^2 = 4$ oppure no. Si ha

A. $1^2 + 1^2 = 2$ No

B. $\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ No

C. $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{45}{16}$ No

D. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$ No

E. $\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{100}{25} = 4$ Sì

Quindi la risposta esatta è la E.

Se non si ricordasse il teorema di geometria sopra citato (peraltro famoso!), un attimo di osservazione su varie figure di triangoli inscritti in una semicirconferenza dovrebbe almeno *suggerire* la validità del teorema stesso, e quindi mettere sulla strada giusta.

(Nella geometria elementare, se non si ricordano i teoremi bisogna almeno fare uso di *molta osservazione*.)

Un'altra idea che può venire in mente è di risolvere il quesito sfruttando il fatto che

> "In un triangolo un lato è sempre minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza"

Nel nostro caso i lati sono lunghi 2, a, b, per cui dev'essere

$$|a - b| < 2 < a + b$$

Ora, si ha

A. $a + b = 2 \not> 2$ quindi A è falsa

B. $a + b = \frac{3}{5} \not> 2$ quindi B è falsa

C. $|a - b| = \frac{3}{4} < 2$ e $a + b = \frac{9}{4} > 2$ quindi C *può* essere vera

D. $a + b = \frac{3}{\sqrt{5}} \not> 2$ quindi D è falsa

E. $|a - b| = \frac{2}{5} < 2$ e $a + b = \frac{14}{5} > 2$ quindi E *può* essere vera

A questo punto però , per decidere quale fra C ed E è la risposta esatta, bisogna sfruttare l'informazione che il triangolo è inscritto in una semicirconferenza, quindi è rettangolo, ecc.

⚓ *Triangolo rettangolo inscritto in una semicirconferenza; teorema di Pitagora.*

---

79. Un trapezio isoscele è inscritto in una semicirconferenza di raggio 5 cm. Calcolare l'area del trapezio sapendo che la sua altezza è uguale a 3 cm.

A. 27 cm^2

B. 20 cm^2

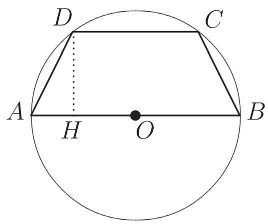
C. 40 cm^2

D. $\dfrac{45}{2}$ cm^2

E. $\dfrac{27}{2}$ cm^2

Geometria sintetica piana; trapezio inscritto in una circonferenza.

Facciamo una figura che illustri la situazione descritta



L'area del trapezio isoscele è data da

$$\text{Area} = \frac{\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right) \times \overline{DH}}{2}$$

Sappiamo che $\overline{AB} = 10$, $\overline{DH} = 3$, $\overline{DO} = 5$, quindi per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo DOH, si ha $\overline{OH} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Allora $\overline{CD} = 2 \times \overline{OH} = 8$, e

$$\text{Area} = \frac{(10+8) \times 3}{2} = 27 \text{ cm}^2$$

Perciò la risposta esatta è la A.

Area del trapezio; teorema di Pitagora.

---

80. Si consideri una corona circolare di raggio esterno R e raggio interno $r = R/3$ e sia S la sua area. Se il raggio esterno rimane invariato e il raggio interno raddoppia, l'area della corrispondente corona circolare è uguale a

A. $\frac{1}{2}S$

B. $\frac{1}{4}S$

C. $\frac{3}{4}S$

D. $\frac{3}{8}S$

E. $\frac{5}{8}S$

Geometria sintetica piana; corona circolare.

Esprimiamo l'area della corona circolare di partenza in funzione di R, calcolandola come differenza tra l'area del cerchio esterno ed interno

$$S = \pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}\pi R^2$$

Se ora il raggio interno raddoppia, diventando quindi $\frac{2}{3}R$, la nuova area sarà

$$S' = \pi \left[R^2 - \left(\frac{2R}{3}\right)^2\right] = \frac{5}{9}\pi R^2 = \frac{5}{8} \times \frac{8}{9}\pi R^2 = \frac{5}{8}S$$

Pertanto la risposta esatta è la E.

⚓ *Area del cerchio e della corona circolare.*

---

81. Un cono circolare retto ha raggio di base r e altezza h. Se si raddoppia il raggio di base e si dimezza l'altezza, il volume del cono

A. si raddoppia

B. si quadruplica

C. aumenta di πr^2

D. si dimezza

E. non cambia

👁 *Geometria sintetica dello spazio; cono.*

✎ Il volume del cono è proporzionale all'area del cerchio di base (che a sua volta è proporzionale a r^2) e all'altezza h

$$V \div hr^2$$

Se si raddoppia il raggio, il volume aumenta di un fattore $2^2 = 4$; se si dimezza l'altezza, il volume diventa la metà. Complessivamente il volume varia di un coefficiente $4/2 = 2$, cioè si raddoppia. La risposta esatta quindi è la A.

☞ La formula per il volume del cono di raggio r e altezza h è

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ma, come si vede dallo svolgimento proposto, per rispondere al quesito non è necessario ricordare che il valore esatto del fattore di proporzionalità è $\pi/3$.

⚓ *Formula del volume del cono; ragionamenti elementari di proporzionalità.*

---

82. Dal punto A Aldo vede il vertice V di un palo verticale HV sotto un angolo di 15°. Se Aldo si avvicina di 10 m al palo, spostandosi nel punto B, l'angolo diventa di 30°. Qual è l'altezza del palo?

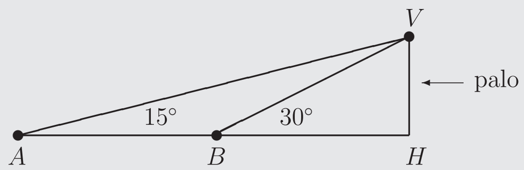
A. $5\sqrt{3}$ m

B. 5 m

C. $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ m

D. 10 m

E. $10\sqrt{3}$ m



Geometria sintetica piana; triangoli.

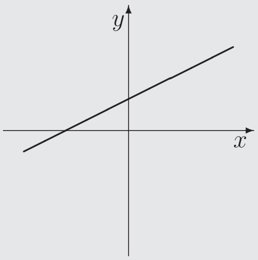
Il triangolo BHV è retto in H, ha l'angolo in B di 30°, quindi l'angolo in V è di 60°. Il triangolo AHV è retto in H, ha l'angolo in A di 15°, quindi l'angolo in V è di 75°. Ma allora l'angolo $\widehat{AVB}$ misura $75° - 60° = 15°$, e questo ci dice che il triangolo ABV è isoscele, quindi $\overline{AB} = \overline{BV}$, e in particolare $\overline{BV} = 10$. D'altro canto, poiché il triangolo BHV ha angoli di $30°, 60°, 90°$, risulta $\overline{VH} = \dfrac{1}{2}\overline{BV} = 5$. Perciò la risposta esatta è la B.

Somma degli angoli interni di un triangolo; triangoli di $30°, 60°, 90°$.

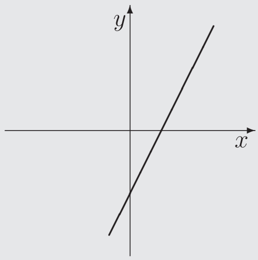
---

83. Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, quale tra le seguenti è la retta di equazione $x + 2y + 3 = 0$?

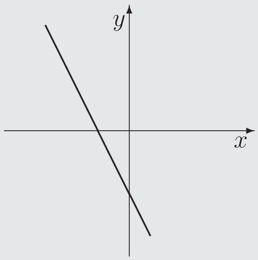
A.



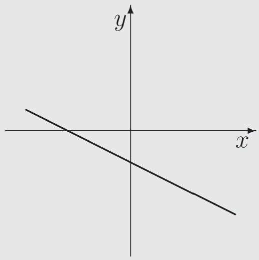
B.



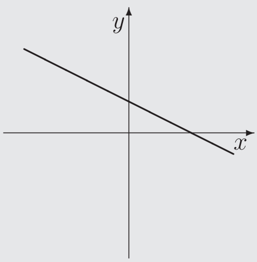
C.



D.



E.



Geometria analitica piana; rette.

Riscriviamo l'equazione nella forma $y = mx + q$, cioè $y = -x/2 - 3/2$. Si tratta di una retta decrescente (cioè $m < 0$: quindi scartiamo A e B), meno inclinata rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante (quindi scartiamo C), e che taglia l'asse y in un punto di ordinata negativa (cioè $q < 0$: quindi scartiamo anche E). Dunque la risposta esatta è la D.

Significato geometrico dei parametri m e q nell'equazione della retta $y = mx + q$.

---

84. Una sfera di raggio di 2 cm e un cilindro circolare retto con raggio di base di 2 cm hanno lo stesso volume. Allora l'altezza del cilindro è uguale a

A. 4 cm

B. $\frac{4}{3}$ cm

C. $\frac{8}{3}$ cm

D. $\frac{2}{3}$ cm

E. 6 cm

Geometria sintetica dello spazio; sfera e cilindro.

La sfera di raggio 2 ha volume $V = \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{32}{3}\pi$. Il cilindro circolare retto di raggio 2 e altezza h ha volume $V = \pi 2^2 h = 4\pi h$. Imponendo l'uguaglianza dei due volumi si trova

$$\frac{32}{3}\pi = 4\pi h \qquad \text{ossia} \qquad h = \frac{8}{3}$$

e la risposta esatta è la C.

Formule per i volumi della sfera e del cilindro.

---

85. Un triangolo rettangolo, avente cateti di lunghezza rispettiva 1 cm e 2 cm, viene fatto ruotare di un giro completo una volta intorno al cateto minore, generando un cono $\mathcal{C}_1$, e una volta intorno al cateto maggiore, generando un cono $\mathcal{C}_2$. Allora il volume di $\mathcal{C}_1$ è

A. uguale al volume di $\mathcal{C}_2$

B. un quarto del volume di $\mathcal{C}_2$

C. il doppio del volume di $\mathcal{C}_2$

D. il quadruplo del volume di $\mathcal{C}_2$

E. la metà del volume di $\mathcal{C}_2$

Geometria sintetica dello spazio; cono.

Il volume di un cono di raggio r e altezza h è

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Il cateto intorno a cui ruota il triangolo rettangolo è l'altezza del cono generato, l'altro cateto ne è il raggio di base. Quindi il cono $\mathcal{C}_1$ ha $r = 2$, $h = 1$, il cono $\mathcal{C}_2$ ha $r = 1$, $h = 2$. Di conseguenza,

$$\frac{\text{Volume di } \mathcal{C}_1}{\text{Volume di } \mathcal{C}_2} = \frac{2^2 \times 1}{1^2 \times 2} = 2$$

Il volume di $\mathcal{C}_1$ è il doppio del volume di $\mathcal{C}_2$, e la risposta esatta è la C.

Formula per il volume del cono; capacità di disegnare (o immaginare) il cono ottenuto per rotazione di un triangolo rettangolo attorno a un cateto.

---

86. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la retta r di equazione

$$y = \frac{2x+1}{-3}$$

La retta passante per il punto di coordinate $(1,1)$ e perpendicolare ad r ha equazione

A. $y = \dfrac{2x+1}{3}$

B. $y = \dfrac{3x-1}{2}$

C. $y = \dfrac{3x+1}{2}$

D. $y = \dfrac{2x-5}{3}$

E. $y = \dfrac{2x-5}{-3}$

Geometria analitica piana; rette.

La retta r ha coefficiente angolare $m = -2/3$, quindi la retta cercata (perpendicolare a questa) ha coefficiente angolare

$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{3}{2}$$

Tra le rette proposte, solo la B e la C hanno questo coefficiente angolare. Controlliamo quale delle due passa per $(1,1)$. Sostituendo le coordinate $(1,1)$ nell'equazione B si trova

$$1 = \frac{3-1}{2}, \qquad \text{vero}$$

mentre sostituendo nell'equazione C si trova

$$1 = \frac{3+1}{2}, \qquad \text{falso}$$

Perciò la risposta esatta è la B.

Equazione della retta; condizione di perpendicolarità tra due rette.

---

87. Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, siano c e c' le due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 = 9$ e $(x-1)^2 + y^2 = 1$, rispettivamente. Quante sono le rette tangenti comuni a c e c'?

A. Nessuna

B. Una

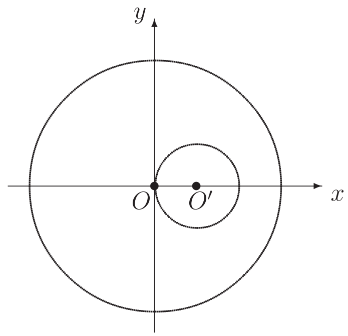
C. Due

D. Più di due, ma in numero finito

E. Infinite

👁 *Geometria analitica piana; circonferenza.*

✎ La circonferenza c ha centro $O = (0,0)$ e raggio 3; la circonferenza c' ha centro $O' = (1,0)$ e raggio 1. Perciò c' è interna a c, e le due circonferenze non hanno alcuna tangente in comune. La risposta esatta è quindi la A.



☞ In questo esercizio è sufficiente saper leggere dall'equazione della circonferenza quali siano il centro e il raggio, dopodiché il problema si risolve facilmente con un ragionamento di geometria sintetica (ad esempio, disegnando le circonferenze e osservando la figura). Sarebbe una grande perdita di tempo affrontare il problema analiticamente, cercando di scrivere equazioni di rette tangenti. Il commento ovvio è che, in un problema geometrico, è sempre utile visualizzare tutto ciò che è possibile (o semplice) visualizzare.

⚓ *Equazione della circonferenza e riconoscimento di centro e raggio; considerazioni elementari sulle tangenti a una circonferenza.*

---

88. Nello spazio sono assegnati quattro punti A, B, C e D non complanari. Allora

A. esistono infinite superfici sferiche passanti per A, B, C e D

B. esiste una ed una sola superficie sferica passante per A, B, C e D

C. non esiste alcuna superficie sferica passante per A, B, C e D

D. l'esistenza di una superficie sferica passante per A, B, C e D dipende dalla posizione reciproca dei punti

E. esistono quattro superfici sferiche passanti per A, B, C e D

Geometria sintetica dello spazio; superficie sferica e condizioni che la determinano.

Se A, B, C, D sono punti non complanari, i primi 3 punti A, B, C sono non allineati e quindi determinano un piano π e, in quel piano, un'unica circonferenza c passante per A, B, C. La sfera passante per A, B, C, D, se esiste, taglierà il piano π lungo la circonferenza c, e avrà il centro sulla retta r perpendicolare a π e passante per il centro della circonferenza. Abbiamo quindi una famiglia di infinite sfere passanti per A, B, C, dipendente da un unico parametro (rappresentato ad esempio dalla posizione del centro della sfera lungo la retta r). È naturale quindi che la sfera possa essere univocamente determinata imponendo un'ulteriore condizione, ossia il passaggio per il punto D, non complanare ad A, B, C. Questo ragionamento geometrico (per quanto non completamente rigoroso) convince che la risposta esatta è la B.

Considerazioni elementari su sfera, circonferenza, piano; condizioni che determinano una circonferenza.

---

89. Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, il luogo dei punti le cui coordinate (x, y) soddisfano l'equazione

$$x(2x + y - 1) = 0$$

è

A. una circonferenza

B. una retta

C. una parabola

D. una coppia di rette

E. una retta o un punto

👁 *Geometria analitica piana; riconoscimento di luoghi descritti da equazioni.*

✎ L'equazione assegnata è soddisfatta se

$$x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad 2x + y - 1 = 0$$

Poiché ognuna delle due equazioni rappresenta una retta, l'equazione di partenza rappresenta una coppia di rette. Perciò la risposta esatta è la D.

☞ Più che su concetti di geometria analitica, questo quesito si basa su un fatto algebrico elementare: il prodotto di due espressioni si annulla se e solo se si annulla almeno uno dei due fattori ("legge di annullamento di un prodotto"). Capito questo, è immediato identificare il luogo come una coppia di rette.

⚓ *Equazione di una retta; legge di annullamento di un prodotto.*

---

90. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, l'insieme delle soluzioni (x, y) del sistema

$$\begin{cases} xy > 1 \\ x = y \end{cases}$$

è formato da

A. due soli punti

B. un segmento

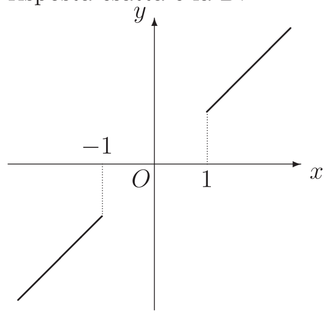
C. una semiretta

D. una coppia di semirette

E. una retta

Geometria analitica piana; luoghi geometrici descritti da sistemi di equazioni e disequazioni.

Conviene partire dalla più semplice delle due condizioni: $y = x$. È noto che questa rappresenta la retta bisettrice del primo e terzo quadrante. Sui punti di questa retta si impone ora l'ulteriore condizione $xy > 1$, equivalente (essendo $y = x$) a $x^2 > 1$ e quindi alle condizioni: $x > 1$ oppure $x < -1$. Questo significa che tra i punti della retta $y = x$ dobbiamo scegliere solo quelli con $x > 1$ oppure $x < -1$. Il luogo geometrico è quindi una coppia di semirette, e la risposta esatta è la D.



Risoluzione di sistemi di equazioni e disequazioni.

---

91. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, quale delle seguenti è l'equazione di una circonferenza?

A. $x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0$

B. $4x^2 - 3x + 4y^2 - 5y - 1 = 0$

C. $(x - 1)^2 - (y - 2)^2 - 1 = 0$

D. $x^2 + y^2 + 1 = 0$

E. $x^4 + y^4 - 1 = 0$

Geometria analitica piana; circonferenza.

L'equazione della circonferenza di centro (a, b) e raggio r è

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

ossia

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + \left(a^2 + b^2 - r^2\right) = 0$$

Quindi

A. È errata perché l'equazione contiene un termine in xy.

C. È errata perché nell'equazione i termini in x^2 e in y^2 hanno coefficiente 1 e -1, anziché lo stesso coefficiente.

D. È errata perché l'equazione, riscritta nella forma $x^2 + y^2 = -1$, indicherebbe centro $(0, 0)$ e raggio r tale che $r^2 = -1$, il che è assurdo.

E. È errata perché l'equazione non è di secondo grado.

Per esclusione, la risposta esatta è la B.

Con un po' di pazienza si può effettivamente riscrivere l'equazione B nella forma standard

$$\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{8}\right)^2 = \left(\frac{5}{8}\sqrt{2}\right)^2$$

evidenziando che si tratta della circonferenza di centro $\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$ e raggio $\frac{5}{8}\sqrt{2}$. Tuttavia, in base ai ragionamenti precedenti questo non è necessario per rispondere alla domanda.

Equazione della circonferenza.

Capitolo 5

Logica

92. Un macchinario produce bulloni. Un bullone è ritenuto difettoso quando ha peso oppure dimensioni sbagliate. Il controllo di qualità mette in evidenza che il 5% dei bulloni prodotti ha almeno il peso sbagliato e che il 3% ha almeno le dimensioni sbagliate. Nell'ipotesi che il 2% dei bulloni prodotti abbia sia peso che dimensioni sbagliate, qual è in totale la percentuale di bulloni difettosi che produce quel macchinario?

A. 8%

B. 10%

C. 6%

D. 4%

E. Non è possibile rispondere con i dati assegnati

Logica e statistica; percentuali.

Un bullone è difettoso quando ha il *solo peso* sbagliato (chiamiamolo bullone di tipo P) oppure la *sola dimensione* sbagliata (bullone di tipo di D) oppure *sia peso sia dimensione* sbagliate (bullone di tipo $P\&D$).

Ora supponiamo (tanto per tradurre le percentuali in numeri assoluti) che i bulloni siano 100 in tutto; allora, in base ai dati del problema, è $P\&D = 2$ (su 100 bulloni, 2 hanno entrambi i difetti), $P = 5 - 2 = 3$ (su 100 bulloni, 5 hanno "almeno" il peso sbagliato: di questi, però, sappiamo che 2 hanno anche la dimensione sbagliata perché hanno entrambi i difetti) e $D = 3 - 2 = 1$ (su 100 bulloni, 3 hanno "almeno" la dimensione sbagliata: di questi, però, 2 hanno anche il peso sbagliato perché hanno entrambi i difetti). In conclusione, i bulloni difettosi sono $P + D + P\&D = 3 + 1 + 2 = 6$ e la risposta esatta è la C.

⚓ *Conteggio di oggetti classificati secondo due criteri; percentuali.*

---

93. Si considerino le due definizioni seguenti:

c. Una circonferenza c è l'insieme dei punti del piano equidistanti da un fissato punto C.

p. Una parabola p è l'insieme dei punti del piano equidistanti da un fissato punto F e da una fissata retta d.

Allora

A. la distanza di un punto qualunque di c da C è uguale alla distanza di un punto qualunque di p da F

B. tre punti distinti di c hanno la stessa distanza da C e tre punti distinti di p hanno la stessa distanza da d

C. un punto di c ha la stessa distanza da C di un punto di p

D. due punti di c hanno la stessa distanza da C e un punto di p ha distanza da F uguale alla distanza che ha da d

E. due punti di c hanno la stessa distanza da C e tre punti distinti di p hanno la stessa distanza da F

👁 *Logica e geometria sintetica piana.*

✎ Leggiamo le risposte alla luce delle definizioni date. Una prima osservazione logica è la seguente. Le due definizioni date sono totalmente indipendenti tra loro: i simboli c, p indicano in questo contesto la *generica* circonferenza e la *generica* parabola (non due *particolari* curve). Quindi ogni risposta che stabilisca una relazione quantitativa tra c e p è sicuramente sbagliata. Sono di questo tipo (e quindi sbagliate) le risposte A e C. Le altre tre risposte (B, D, E) contengono invece un'affermazione su c e un'affermazione su p, indipendenti tra loro. L'affermazione sulla circonferenza è vera in ciascuna di queste tre risposte. L'affermazione fatta su p, invece, è quella che permette di discernere la risposta esatta:

B afferma che "tre punti distinti di p hanno la stessa distanza da d";

D afferma che "un punto di p ha distanza da F uguale alla distanza che ha da d";

E afferma che "tre punti distinti di p hanno la stessa distanza da F".

Ci si rende conto subito che la sola in accordo con la definizione di parabola è la D. Quindi la risposta esatta è D.

Più che un quesito di geometria, è in realtà un esercizio di "deduzioni logiche da definizioni matematiche"; naturalmente aiuta sapere di cosa si sta parlando, quindi: definizione metrica di circonferenza e parabola.

---

94. Aldo, Bruno e Carlo sono tre amici. Si sa che

- almeno uno di essi è laureato
- se Aldo è laureato, anche Bruno lo è
- se Carlo è laureato, anche Aldo lo è
- solo uno tra Bruno e Carlo è laureato

Allora si deduce che

A. Aldo e Bruno sono laureati

B. Bruno è laureato

C. Aldo è laureato e Bruno non lo è

D. Carlo è laureato

E. i laureati sono due

Logica; deduzioni.

✎ Per non perdere il filo del ragionamento, conviene elencare sistematicamente le situazioni possibili (sono poche!). Indicando Aldo, Bruno e Carlo con le lettere A, B, C, rispettivamente, è possibile che i laureati siano

caso 1: nessuno

caso 2: A

caso 3: B

caso 4: C

caso 5: A, B

caso 6: A, C

caso 7: B, C

caso 8: A, B, C

Passiamo ora in rassegna le quattro informazioni che fornisce il quesito, e chiediamoci quali casi ciascuna di esse porta ad *escludere*. Si vede che

con la prima informazione ("almeno uno di essi è laureato") escludiamo il caso 1;

con la seconda informazione ("se Aldo è laureato, anche Bruno lo è") escludiamo anche i casi 2, 6;

con la terza informazione ("se Carlo è laureato, anche Aldo lo è") escludiamo anche i casi 4, 7;

con la quarta informazione ("solo uno tra Bruno e Carlo è laureato") escludiamo anche il caso 8.

Rimangono i casi 3 e 5, il che significa

> "è laureato solo Bruno, oppure sono laureati sia Bruno sia Carlo (ma non Aldo)"

Inoltre, per come abbiamo ragionato, *questo è tutto ciò che si può dedurre* dalle informazioni di partenza. Il quesito chiede appunto cosa si può dedurre (necessariamente) dalle premesse; scorrendo le risposte proposte, si vede che quella esatta è la B: Bruno è laureato. Questo infatti è sicuramente vero.

☞ Le risposte A e C sono sicuramente false, in base alle premesse, mentre le risposte D ed E *possono* essere vere, ma non lo sono *necessariamente*, e quindi, per come è formulato il quesito, non sono esatte.

⚓ *Deduzioni ed esclusioni in situazioni con un numero finito di possibilità.*

---

95. L'affermazione

A nessuno studente sono antipatici tutti i professori

equivale a dire che

A. c'è uno studente a cui tutti i professori sono antipatici

B. tutti i professori sono antipatici a tutti gli studenti

C. a qualche studente sono simpatici tutti i professori

D. ad ogni studente è simpatico almeno un professore

E. c'è un professore che è simpatico a tutti gli studenti

Logica; negazione di una proposizione.

In generale, affermare che

"*Nessun x ha* la tale proprietà"

equivale ad affermare che

"*Ogni x non ha* la tale proprietà"

Quindi la frase "*A nessuno* studente *sono* antipatici tutti i professori" significa "*Ad ogni* studente *non sono* antipatici tutti i professori". A sua volta, dire "... non sono antipatici tutti" significa, in positivo, dire "... è simpatico almeno uno", quindi la frase di partenza è equivalente a "Ad ogni studente è simpatico almeno un professore", che è la D.

La risposta esatta è dunque la D.

Negazione di una proposizione contenente i quantificatori "per ogni" ed "esiste".

---

96. L'affermazione

Non c'è grattacielo senza ascensore

significa

A. nessun grattacielo ha due ascensori

B. ogni grattacielo ha almeno un ascensore

C. ogni grattacielo ha due ascensori

D. qualche grattacielo non ha ascensore

E. qualche grattacielo ha almeno un ascensore

Logica; negazione di una proposizione.

In generale, affermare che

"*Non esiste x senza* la tale proprietà"

equivale ad affermare che

"*Ogni x non è senza* la tale proprietà"

ossia (due negazioni affermano)

"*Ogni x ha* la tale proprietà"

Quindi "Non c'è grattacielo senza ascensore" significa "Ogni grattacielo ha l'ascensore", o più precisamente la B: "Ogni grattacielo ha almeno un ascensore".

La risposta esatta è dunque la B.

Negazione di una proposizione contenente il quantificatore "esiste".

---

97. Su un tavolo sono sparsi alcuni gettoni. Si sa che metà di essi sono quadrati e metà rotondi; metà sono rossi e metà blu. Allora si può dedurre che

A. il numero di gettoni quadrati blu è uguale al numero di gettoni rotondi rossi

B. i quattro tipi di gettoni sono in numero uguale

C. il numero di gettoni è divisibile per quattro

D. il numero di gettoni quadrati blu è uguale al numero di gettoni quadrati rossi

E. il numero di gettoni rotondi rossi è uguale al numero di gettoni quadrati rossi

Logica e statistica.

I gettoni si possono classificare rispetto a due criteri indipendenti: il colore e la forma. Questo tipo di classificazione tipicamente si fa con una "tabella a doppia entrata". Supponiamo, tanto per fissare le idee, che i gettoni siano 100 (ma il ragionamento che segue rimane valido qualunque sia il numero totale N dei gettoni, che è evidentemente pari ma per il resto incognito), e costruiamo una tabella del tipo

	quadrati	rotondi	totale
rossi	?	?	50
blu	?	?	50
totale	50	50	100

I totali parziali di riga e colonna (pari a 50) tengono conto dell'informazione "Si sa che metà di essi sono quadrati e metà rotondi; metà sono rossi e metà blu". Se ora proviamo a scrivere ad esempio nella casella "quadrati e rossi" un numero n, ci accorgiamo che questo, per le condizioni che abbiamo sui totali di riga e colonna, determina tutti gli altri valori, al modo seguente

	quadrati	rotondi	totale
rossi	n	$50-n$	50
blu	$50-n$	n	50
totale	50	50	100

Scopriamo così che, in ogni caso,

i gettoni quadrati rossi sono tanti quanti i rotondi blu;
i gettoni quadrati blu sono tanti quanti i rotondi rossi.

Quest'ultima affermazione è esattamente la A. Pertanto la risposta esatta è la A.

Per *particolari* scelte di N ed n, qualcuna delle risposte B, C, D, E *potrebbe* essere vera, ma come si è visto l'unica risposta che *si deduce necessariamente* dalle premesse è la A.

☞ Anche se il quesito non richiede, per rispondervi, alcuna conoscenza specifica di statistica, l'abbiamo classificato come "logica e statistica" perché l'idea di costruire una tabella a doppia entrata, e ragionarvi sopra come abbiamo fatto, è senz'altro più naturale per chi abbia un po' di dimestichezza con la statistica elementare.

⚓ *Ragionamenti su "tabelle a doppia entrata".*

---

98. Nello scorso campionato di calcio il 60% dei rigori concessi è stato a favore della squadra di casa e il restante 40% a favore della squadra ospite. Si è constatato che l'80% dei rigori tirati dalla squadra di casa è andato a segno, mentre solo il 75% di quelli tirati dalla squadra ospite ha avuto successo. Qual è stata la percentuale complessiva dei rigori segnati?

A. Minore del 75%

B. Del 77%

C. Del 78%

D. Del 77,5%

E. Maggiore dell'80

👁 *Logica e statistica; percentuali.*

✎ Classifichiamo la totalità dei rigori assegnati (posta uguale a 100, in modo che valori assoluti e percentuali assolute coincidano) secondo i due criteri: assegnati alla squadra di casa o ospite, andati a segno o no. I dati del problema sono:

totale rigori assegnati alla squadra di casa: 60;

totale rigori assegnati alla squadra ospite: 40;

rigori assegnati alla squadra di casa e andati a segno: l'80% di 60, cioè 48;

rigori assegnati alla squadra ospite e andati a segno: il 75% di 40, cioè 30.

Sommando questi ultimi due numeri (rigori assegnati alla squadra di casa e andati a segno e rigori assegnati alla squadra ospite e andati a segno) otteniamo la totalità dei rigori andati a segno: $48 + 30 = 78$. La risposta esatta è quindi la C.

Si noti come abbiamo tradotto *percentuali relative* in *percentuali assolute*, ad esempio: l'80% del 60% è il 48%.

Classificazione di oggetti secondo due criteri; percentuali assolute e relative.

---

99. Fra tre anni Aldo avrà il doppio dell'età che Sara aveva tre anni fa, mentre ora il quadruplo degli anni di lui è pari al quintuplo degli anni di lei. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A. Si può dedurre che Sara è più vecchia di Aldo

B. Per conoscere le età di Sara e di Aldo ci vuole un ulteriore dato

C. I due hanno la stessa età

D. Fra un anno Sara avrà tanti anni quanti ne aveva Aldo un anno fa

E. Si possono dedurre le età di Sara e di Aldo

Logica e algebra; problemi esprimibili con sistemi di equazioni.

Siano s ed a, rispettivamente, le età di Sara e Aldo oggi. I dati del problema si traducono allora nelle equazioni

$$\begin{cases} 3 + a = 2\,(s - 3) \\ 4a = 5s \end{cases}$$

Ricavando dalla seconda equazione $a = 5s/4$ e sostituendo nella prima, si ottiene

$$\begin{aligned} 3 + \frac{5}{4}s &= 2s - 6 \\ \frac{3}{4}s &= 9 \\ s &= 12 \end{aligned}$$

e quindi anche

$$a = \frac{5}{4} \times 12 = 15$$

Abbiamo quindi calcolato le due età. Perciò la risposta E è esatta (e la B sicuramente falsa).

Si può controllare che ciascuna delle altre affermazioni A, C, D è effettivamente falsa.

Capacità di tradurre condizioni formulate a parole in equazioni; sistemi di due equazioni in due incognite.

---

100. Una scatola contiene 10 cubi. Ogni faccia di ciascun cubo è colorata di verde oppure di bianco oppure di rosso. In totale, 6 cubi hanno almeno una faccia verde, 7 hanno almeno una faccia bianca e 9 hanno almeno una faccia rossa; inoltre, nessuno dei 10 cubi ha tutte le facce dello stesso colore. Quanti cubi nella scatola hanno facce di tutti e tre i colori?

A. Nove

B. Due

C. Nessuno

D. Otto

E. Uno

Logica; deduzioni.

Abbreviamo Bianco, Rosso, Verde con B, R, V, rispettivamente. Numeriamo i cubi da 1 a 10; 9 di essi hanno almeno una faccia R, possiamo supporre che siano i primi 9; il decimo, non avendo una faccia R, avrà certamente almeno una faccia V e una B (altrimenti avrebbe le 3 facce dello stesso colore). Rappresentiamo la situazione con questa tabella

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	R	R	R	R	R	R	R	R	
									B
									V

Proseguiamo chiedendoci ora quali sono i 7 cubi con una faccia B. Uno l'abbiamo già "sistemato": è il decimo; gli altri 6 possiamo supporre che siano i primi 6. La situazione è allora

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	R	R	R	R	R	R	R	R	
B	B	B	B	B	B				B
									V

Abbiamo così "sistemato" i cubi che hanno almeno una faccia R e quelli che hanno almeno una faccia B. Occupiamoci ora di quelli con almeno una faccia V: sono 6 in tutto, e di questi: uno è il numero 10; tre sono necessariamente i numeri 7, 8, 9, altrimenti questi avrebbero tutte le facce R, il che è proibito. Dunque siamo arrivati a

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	R	R	R	R	R	R	R	R	
B	B	B	B	B	B				B
						V	V	V	V

Restano da sistemare gli ultimi due cubi con almeno una faccia V; questi saranno due qualsiasi tra i numeri da 1 a 6, e questi due risulteranno quindi avere facce di tutti e tre i colori. Quindi sono 2 i cubi con facce di tutti e tre i colori.

La risposta esatta è quindi la B.

Deduzioni ed esclusioni in situazioni con un numero finito di possibilità.

---

101. Sapendo che l'affermazione

Tutti i sabati vado in pizzeria e poi al cinema

è *falsa*, se ne deduce che

A. qualche sabato non vado in pizzeria o al cinema

B. tutti i sabati non vado in pizzeria o al cinema

C. qualche sabato non vado né in pizzeria né al cinema

D. tutti i sabati non vado né in pizzeria né al cinema

E. tutti i giorni vado in pizzeria e al cinema

Logica; negazione di una proposizione.

Dire che la frase proposta è falsa significa che

"Qualche sabato (= almeno un sabato) *non accade* che io vada in pizzeria e poi al cinema"

A sua volta, *negare* "io vado in pizzeria *e* al cinema" significa *affermare* che

"Non vado in pizzeria *oppure* non vado al cinema"

In definitiva, la negazione della frase di partenza è

"Qualche sabato non vado in pizzeria oppure non vado al cinema"

Quindi la risposta esatta è la A.

⚓ *Negazione di una proposizione contenente il quantificatore "per ogni" ed il connettivo "e".*

---

102. In una città sono pubblicati tre giornali: *il Mattino*, *il Pomeriggio* e *la Sera*. Il 40% dei cittadini legge il *Mattino*, il 30% legge il *Pomeriggio* e il 10% legge la *Sera*. Inoltre, il 15% dei cittadini legge sia il *Mattino* che il *Pomeriggio*, il 7% sia il *Mattino* che la *Sera* e il 5% sia il *Pomeriggio* che la *Sera*. Infine, il 2% dei cittadini legge tutti e tre i giornali. Qual è la percentuale di cittadini che <u>non</u> legge alcun giornale?

A. 1%

B. 20%

C. 45%

D. 50%

E. 60%

Logica; e statistica; percentuali.

Anzitutto, occorre capire bene il significato dei dati. Ad es., quando si dice che

"il 40% dei cittadini legge il *Mattino*"

questa frase va correttamente interpretata come "il 40% dei cittadini legge almeno il *Mattino*"

quindi il dato 40% comprende 4 categorie di persone: chi legge solo il *Mattino*, chi legge il *Mattino* e il *Pomeriggio* (ma non la *Sera*), chi legge il *Mattino* e la *Sera* (ma non il *Pomeriggio*) e infine chi li legge tutti e tre. Analogo discorso vale per tutti gli altri dati.

Detto questo, ripartiamo la totalità dei cittadini che *legge almeno un giornale* in 7 categorie:

M = chi legge solo il *Mattino*;

P = chi legge solo il *Pomeriggio*;

S = chi legge solo la *Sera*;

MP = chi legge *Mattino* e *Pomeriggio* (ma non la *Sera*);

MS = chi legge *Mattino* e *Sera* (ma non il *Pomeriggio*);

PS = chi legge *Pomeriggio* e *Sera* (ma non il *Mattino*);

MPS = chi legge *Mattino*, *Pomeriggio* e *Sera*.

Poi, per semplificare i conteggi, supponiamo che i cittadini siano 100, in modo che percentuali e valori assoluti coincidano. Allora dai dati del problema si ha $MPS = 2$. Inoltre

$$\begin{aligned} 15 &= MP + MPS = MP + 2 \\ 7 &= MS + MPS = MS + 2 \\ 5 &= PS + MPS = PS + 2 \end{aligned}$$

da cui $MP = 13$, $MS = 5$ e $PS = 3$. Infine

$$\begin{aligned} 40 &= M + MP + MS + MPS = M + 13 + 5 + 2 \\ 30 &= P + MP + PS = P + 13 + 3 + 2 \\ 10 &= S + MS + PS + MPS = S + 5 + 3 + 2 \end{aligned}$$

da cui $M = 20$, $P = 12$ e $S = 0$. Sommando ora tutti i numeri otteniamo

$$M + P + S + MP + MS + PS + MPS = 20 + 12 + 0 + 13 + 5 + 3 + 2 = 55$$

quindi il 55% dei cittadini legge almeno un giornale, e per differenza il 45% dei cittadini non legge alcun giornale. La risposta esatta quindi è la C.

Conteggio di oggetti classificati secondo tre criteri; percentuali. ⚓

---

103. L'affermazione

Domani Aldo verrà dimesso dall'ospedale se oggi rimane senza febbre

equivale a una delle seguenti. Quale?

A. Se domani verrà dimesso, vuol dire che oggi Aldo è senza febbre

B. Per essere dimesso domani, è necessario che oggi Aldo rimanga senza febbre

C. Per essere dimesso domani, è sufficiente che oggi Aldo rimanga senza febbre

D. Domani Aldo verrà dimesso solo se oggi rimane senza febbre

E. Oggi Aldo ha la febbre e domani non verrà dimesso

Logica; implicazioni tra proposizioni.

Definendo le proposizioni

$$a = \text{“}\textit{Domani Aldo verrà dimesso dall'ospedale}\text{”}$$
$$b = \text{“}\textit{oggi Aldo rimane senza febbre}\text{”}$$

la frase proposta ha una forma del tipo: vale (accadrà) a se vale (si verifica) b, ossia la condizione (ipotesi, causa) b *implica* la condizione (tesi, effetto) a. Si può utilmente schematizzare una frase di questa forma mediante il simbolo $\Rightarrow$ (detto "di implicazione")

$$b \Rightarrow a$$

Ora leggiamo le varie risposte ad una ad una e cerchiamo di capire se esprimono lo stesso concetto dell'affermazione di partenza.

A. È del tipo "se *per ipotesi* vale a, allora ne consegue b", ossia $a \Rightarrow b$. Questa affermazione è l'inversa di quella iniziale, e perciò la A è sbagliata.

B. Esprime il concetto che b deve verificarsi perché possa valere a: in altri termini, se io *per ipotesi* "vedessi" a, allora dovrei "vedere" anche b, quindi $a \Rightarrow b$. Anche questa risposta è sbagliata.

C. Esprime il fatto che il verificarsi di b basta perché valga a: quindi, se io *per ipotesi* "vedessi" b, allora di sicuro "vedrei" anche a, ossia $b \Rightarrow a$. Questa è la risposta corretta.

D. Il fatto che b si verifica solo se si verifica a vuol dire che b è necessario perché valga a, quindi la D è come la B.

E. Se oggi Aldo ha la febbre, cosa si può dedurre dall'affermazione iniziale ("se oggi Aldo non ha la febbre, è sicuro che domani verrà dimesso") circa le dimissioni dall'ospedale? La risposta è: non si deduce nulla, ovvero: domani Aldo potrebbe essere dimesso oppure no. Pertanto anche la E è sbagliata.

La risposta esatta è quindi la C.

La soluzione del quesito si semplifica se si tiene presente che un'implicazione $p \Rightarrow q$ può *sempre* essere espressa verbalmente con una qualsiasi delle seguenti locuzioni:

"condizione sufficiente per q è p"

"condizione necessaria per p è q"

"q vale se vale p"

"p vale solo se vale q".

Implicazione tra proposizioni; uso delle locuzioni "condizione necessaria" e "condizione sufficiente"e delle locuzioni "se" e "solo se".

---

104. Dalla proposizione

Una successione di numeri reali, se crescente e limitata, è convergente

si deduce che

A. la convergenza è una condizione necessaria per la limitatezza di una successione reale

B. la convergenza è una condizione necessaria per la crescenza di una successione reale

C. le condizioni di crescenza e di limitatezza sono sufficienti per la convergenza di una successione reale

D. le condizioni di crescenza e di limitatezza sono necessarie e sufficienti per la convergenza di una successione reale

E. esistono successioni reali convergenti

Logica; implicazioni tra proposizioni.

✎ Per brevità, chiamiamo p la proposizione di partenza ed s una successione di numeri reali. Allora p si può schematizzare così, sotto forma di implicazione (rimandiamo al commento del quesito n° 103 per la spiegazione del legame tra "implicazione" e le locuzioni "condizione necessaria" e "condizione sufficiente"):

$$\text{per ogni } s,\ (s \text{ crescente e limitata} \Rightarrow s \text{ convergente})$$

Riformuliamo in modo analogo le affermazioni proposte dalla varie risposte.

A. Per ogni s, (s limitata $\Rightarrow$ s convergente)

B. Per ogni s, (s crescente $\Rightarrow$ s convergente)

C. Per ogni s, (s crescente e limitata $\Rightarrow$ s convergente)

D. Per ogni s, (s crescente e limitata $\Leftrightarrow$ s convergente)

E. Esiste una s tale che s è convergente

Si vede subito che la C dice la stessa cosa della p, e quindi C è la risposta esatta.

☞ Le affermazioni A e B pretendono di concludere la tesi sotto una sola ipotesi anziché due, perciò non sono conseguenza di p; D pretende di dedurre anche l'implicazione inversa, che non è affermata dalla p; la E seguirebbe dalla p se sapessimo già che esistono successioni crescenti e limitate, cosa che la p stessa non consente di affermare.

⚓ *Implicazione tra proposizioni; uso delle locuzioni "condizione necessaria" e "condizione sufficiente".*

---

105. In un cubo due vertici si dicono *opposti* se il segmento che li congiunge passa per il centro del cubo. Quale delle seguenti proprietà caratterizza i vertici opposti di un cubo?

A. Nessuna faccia li contiene entrambi

B. Nessuno spigolo li contiene entrambi

C. Nell'insieme delle distanze tra le coppie di vertici, la loro distanza è minima

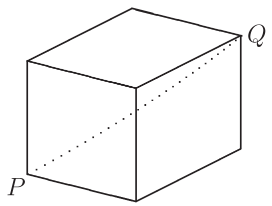
D. Esistono due facce distinte che li contengono

E. Sono equidistanti dal centro del cubo

Logica e geometria sintetica dello spazio; equivalenze logiche.

Dire che una proprietà *caratterizza* i vertici opposti del cubo significa: se i vertici sono opposti allora vale la proprietà e, viceversa, se vale la proprietà allora i vertici sono opposti.

Cominciamo a supporre che i vertici siano opposti, come P e Q in figura.



Si riconosce subito che

vale la A (nessuna faccia li contiene entrambi);

vale la B (nessuno spigolo li contiene entrambi);

non vale la C (nell'insieme delle distanze tra le coppie di vertici, la distanza tra vertici opposti è *massima*, non minima);

vale la D (esistono due facce distinte che li contengono);

vale la E (i vertici sono equidistanti dal centro del cubo).

Scartiamo quindi la risposta C. Dobbiamo ora chiederci, per ciascuna delle proprietà A, B, D, E, se la proprietà implichi il fatto che i due vertici sono opposti. Ragioniamo così: pensiamo di fissare un vertice P del cubo, supponiamo che la proprietà valga per due vertici P, Q, e vediamo se si può *dedurre* che Q è il vertice opposto di P.

Supponiamo che valga la A: nessuna faccia contiene P e Q. Il vertice P è contenuto in 3 facce, che complessivamente contengono tutti gli altri vertici tranne il vertice opposto a P. Questo significa che, se Q non è opposto, certamente esiste una faccia che contiene P e Q, e quindi se nessuna faccia li contiene entrambi allora i vertici sono opposti. Perciò la risposta esatta è la A.

Passiamo comunque in rassegna anche B, D, E (la risposta esatta avrebbe potuto non essere elencata per prima).

Supponiamo che valga la B: nessuno spigolo contiene P e Q. Il vertice P è contenuto in 3 spigoli, che complessivamente contengono 4 vertici (su 8 che ha il cubo), quindi Q può essere uno qualsiasi degli *altri* 4 vertici, non necessariamente quello opposto a P. Perciò la B non è la risposta esatta.

Supponiamo che valga la D: esistono due facce distinte che contengono P e Q. Scegliamo una faccia f_1 che contiene P; scegliamo ora una faccia f_2 diversa da questa; poiché f_2 ha

4 vertici e Q può essere uno qualsiasi di questi (tranne eventualmente P stesso), Q non è necessariamente opposto a P. Perciò anche D non è la risposta esatta.

Supponiamo che valga la E: P e Q sono equidistanti dal centro del cubo. Ma questo è vero comunque si scelgano i due vertici (per la simmetria che ha il cubo), quindi non implica che Q sia opposto a P, e neanche la D è la risposta esatta.

⚓ *Concetto di proprietà equivalenti; terminologia e considerazioni elementari su vertici, spigoli e facce del cubo.*

---

106. Indicate con p e q due generiche condizioni, quattro delle seguenti affermazioni sono fra loro logicamente equivalenti, mentre una non lo è con le altre. Quale?

A. Può verificarsi p solo se q è verificata

B. È sufficiente che si verifichi p perché ne segua q

C. È necessario che si verifichi q perché si possa verificare p

D. p implica q

E. p segue dal verificarsi di q

Logica; implicazioni tra proposizioni.

Riformuliamo ciascuna affermazione usando il simbolo $\Rightarrow$ di implicazione.

(Si veda, in proposito, quanto osservato nel quesito n° 103 sull'uso delle varie locuzioni logiche.)

A. $p \Rightarrow q$

B. $p \Rightarrow q$

C. $p \Rightarrow q$

D. $p \Rightarrow q$

E. $q \Rightarrow p$

Poiché la domanda chiedeva quale delle affermazioni non è equivalente alle altre quattro, la risposta da dare è la E.

Implicazione tra proposizioni; uso delle locuzioni "condizione necessaria" e "condizione sufficiente"e delle locuzioni "se" e "solo se".

---

107. Quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?

Affinché due frazioni siano uguali

A. è sufficiente che abbiano lo stesso numeratore e lo stesso denominatore

B. è necessario che abbiano numeratori e denominatori proporzionali

C. è necessario che abbiano uguale numeratore e uguale denominatore

D. non è necessario che abbiano uguale numeratore e uguale denominatore

E. è necessario e sufficiente che abbiano numeratori e denominatori proporzionali

Logica e aritmetica; frazioni.

Ricordiamo che l'uguaglianza tra due frazioni

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

($a, b \neq 0, c, d \neq 0$ numeri interi) si realizza non solo quando $a = c$ e $b = d$, ma più in generale quando $a = kc$ e $b = kd$ per qualche intero $k \neq 0$. Infatti in tal caso k si semplifica e si ha

$$\frac{a}{b} = \frac{kc}{kd} = \frac{c}{d}$$

Le uguaglianze $a = kc$ e $b = kd$ significano che le frazioni hanno numeratori e denominatori proporzionali. Si riconosce quindi che le affermazioni A, B, D, E sono tutte vere (attenzione a ragionare bene sulle locuzioni "condizione necessaria" e "condizione sufficiente"!), mentre la C è falsa, come mostra l'esempio $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, in cui $1 \neq 3$ e $2 \neq 6$.

Poiché la domanda chiedeva appunto quale delle affermazioni è falsa, la risposta da dare è la C.

Proprietà delle frazioni; uso delle locuzioni "condizione necessaria" e "condizione sufficiente".

Capitolo 6

Statistica

108. Tra tutte le "parole" ottenute prendendo una sola volta 4 delle 6 lettere A, B, C, D, E ed F, la percentuale di quelle che *non* contengono vocali è

A. 7% circa

B. 67% circa

C. 33% circa

D. 40%

E. 75%

Statistica; conteggi.

Una *parola* di 4 lettere è una sequenza (ordinata, da sinistra verso destra) di 4 caselle:

$$\square\square\square\square$$

Il numero totale di parole ottenute prendendo una sola volta 4 delle 6 lettere A, B, C, D, E ed F è dato da

$$N = 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

Infatti, abbiamo 6 modi di scegliere la prima lettera:

$$A\square\square\square, \quad B\square\square\square, \quad C\square\square\square, \quad D\square\square\square, \quad E\square\square\square, \quad F\square\square\square$$

e per ciascuna di queste scelte 5 modi di scegliere la seconda:

$$AB\square\square, \quad AC\square\square, \quad AD\square\square, \quad AE\square\square, \quad AF\square\square$$
$$BA\square\square, \quad BC\square\square, \quad BD\square\square, \quad BE\square\square, \quad BF\square\square$$

ecc.

e poi ancora 4 modi di scegliere la terza, e infine 3 modi di scegliere la quarta.

Le lettere che *non* sono vocali, tra queste 6, sono 4. Quindi le parole che *non* contengono vocali sono

$$n = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

in quanto abbiamo 4 modi di scegliere la prima lettera, ..., e 1 modo solo di scegliere la quarta.

Il rapporto tra parole non contenenti vocali e tutte le parole è quindi:

$$\frac{n}{N} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{15}$$

Dobbiamo confrontare il numero $\frac{1}{15}$ con le 5 percentuali proposte dalle risposte, che tradotte in frequenze relative (cioè in numeri tra 0 e 1) sono

A. $0,07$

B. $0,67$

C. $0,33$

D. $0,40$

E. $0,75$

Poiché $\frac{1}{15} < \frac{1}{10} = 0,1$ tutte le risposte tranne la A restano escluse, indicando valori più alti. Scegliamo quindi la risposta A.

Controlliamo che effettivamente

$$\frac{1}{15} \simeq 0,07 = \frac{7}{100}$$

Infatti, $7 \times 15 = 105 \simeq 100$. (Notiamo che la risposta A diceva 7% *circa*.)

☞ Il modo in cui abbiamo conteggiato il numero di parole (totale o senza vocali), al di là dei termini tecnici del calcolo combinatorio (disposizioni, permutazioni, ...) rientra nel principio generale con cui si conteggia il numero totale di scelte in uno *schema ad albero*.

> "se al passo 1 abbiamo n_1 opzioni, e per ciascuna di queste al passo 2 abbiamo n_2 opzioni, ..., e per ciascuna di queste all'ultimo passo k abbiamo n_k opzioni, il numero totale di scelte è il prodotto $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$"

Questo è un modo di ragionare utile per ricostruire varie situazioni combinatorie.

⚓ *Conteggio del numero totale di scelte in uno schema ad albero; traduzione di percentuali in frequenze relative e viceversa.*

---

109. Per trasmettere segnali Aldo issa 5 bandierine (3 gialle e 2 blu) su di un'asta. Quanti segnali diversi può ottenere Aldo?

A. 6

B. 5

C. 10

D. 25

E. 20

Statistica; conteggi.

Possiamo ragionare così: su 5 "posti" che ha l'asta, dobbiamo sceglierne esattamente 2 in cui mettere le bandierine blu (negli altri posti andranno allora le bandierine gialle).

Quanti sono i modi in cui scegliere 2 oggetti (i posti blu) su 5 (i posti disponibili)? Sono

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Questo è chiaro se si conoscono i *coefficienti binomiali* e il concetto di *combinazioni semplici*; altrimenti il risultato si può ottenere ragionando secondo uno schema ad albero (v. commento al quesito n° 108): abbiamo 5 modi di scegliere il primo posto (b = blu)

$$b\square\square\square\square, \quad \square b\square\square\square, \quad \square\square b\square\square, \quad \square\square\square b\square, \quad \square\square\square\square b$$

e per ciascuno di questi ne abbiamo 4 per scegliere il secondo

$$\begin{array}{llll} bb\square\square\square, & b\square b\square\square, & b\square\square b\square, & b\square\square\square b \\ bb\square\square\square, & \square bb\square\square, & \square b\square b\square, & \square b\square\square b \\ \text{ecc.} & & & \end{array}$$

quindi in tutto 20; a questo punto però dobbiamo dividere per 2, perché – ad esempio – la scelta "1° e 2° posto" dà lo stesso risultato della scelta "2° e 1° posto" (come mostra chiaramente lo schema di sopra).

In definitiva, la risposta esatta è la C.

Combinazioni e coefficienti binomiali.

---

110. L'età media dei partecipanti ad una festa è di 24 anni. Se l'età media degli uomini è 28 anni e quella delle donne è 18 anni, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

A. $\frac{3}{2}$

B. 2

C. $\frac{14}{9}$

D. $\frac{4}{3}$

E. $\frac{9}{14}$

👁 *Statistica; media.*

✎ Indichiamo con u e d il numero totale di uomini e donne, rispettivamente: si chiede di calcolare il rapporto u/d.

L'età media dei partecipanti alla festa non è semplicemente la media aritmetica tra l'età media degli uomini e l'età media delle donne, perché i due gruppi non sono ugualmente numerosi (come si vede dalle risposte); occorre invece fare una *media ponderata*

$$\text{età media dei partecipanti} = \frac{u \times 28 + d \times 18}{u + d}$$

Imponiamo che questa uguagli 24, come affermato nel quesito, e risolviamo

$$\begin{aligned} 24 &= \frac{u \times 28 + d \times 18}{u + d} \\ 24u + 24d &= 28u + 18d \\ 6d &= 4u \\ \frac{u}{d} &= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Il rapporto $\frac{u}{d}$ vale $\frac{3}{2}$, quindi la risposta esatta è la A.

☞ Chi non avesse familiarità con il concetto di media ponderata potrebbe arrivarci così. Partiamo da

$$\begin{aligned} \text{età media dei partecipanti} &= \frac{\text{somma età dei partecipanti}}{\text{n}^\circ \text{ totale dei partecipanti}} \\ &= \frac{\text{somma età degli uomini} + \text{somma età delle donne}}{u + d} \end{aligned}$$

Ma

$$\text{età media degli uomini} = \frac{\text{somma età degli uomini}}{\text{n° totale degli uomini}}$$

e quindi

$$\text{somma età degli uomini} = 28 \times u$$

Analogamente

$$\text{somma età delle donne} = 18 \times d$$

Si ottiene così la formula della media ponderata, già vista prima.

Calcolo di medie e medie ponderate.

---

111. Ammettiamo che nella popolazione degli studenti del Politecnico i maschi (M) siano il doppio delle femmine (F). Allora, se si sorteggiano un primo numero di matricola e poi un secondo (potendo uno stesso numero di matricola essere sorteggiato due volte), le frequenze statistiche degli abbinamenti MM, MF, e FF sono

A. $\text{MM} = \frac{4}{9}$; $\text{MF} = \frac{4}{9}$; $\text{FF} = \frac{1}{9}$

B. tutte uguali

C. $\text{MM} = \frac{3}{6}$; $\text{MF} = \frac{2}{6}$; $\text{FF} = \frac{1}{6}$

D. $\text{MM} = \frac{5}{9}$; $\text{MF} = \frac{3}{9}$; $\text{FF} = \frac{1}{9}$

E. $\text{MM} = \frac{6}{9}$; $\text{MF} = \frac{2}{9}$; $\text{FF} = \frac{1}{9}$

Statistica; frequenze relative.

Indichiamo con m la frequenza relativa dei maschi e con f quella delle femmine. Dire che i maschi sono il doppio delle femmine, significa dire che sono i 2/3 del totale; quindi

$$m = \frac{2}{3}, \qquad f = \frac{1}{3}$$

Se si estraggono due numeri di matricola a caso, la frequenza relativa con cui si estraggono 2 maschi è data da

$$\text{frequenza relativa delle coppie } MM = \frac{\text{n° totale delle coppie } MM}{\text{n° totale delle coppie}}$$

Detto N è il numero complessivo degli studenti (maschi + femmine), la totalità dei possibili abbinamenti di studenti è N^2 e la totalità delle coppie MM è $\left(\frac{2}{3}N\right)^2$ di modo che

$$\text{frequenza relativa delle coppie } MM = \frac{\left(\frac{2}{3}N\right)^2}{N^2} = \frac{4}{9}$$

Analogamente, la frequenza relativa con cui si estraggono 2 femmine vale

$$\text{frequenza relativa delle coppie } FF = \frac{\left(\frac{1}{3}N\right)^2}{N^2} = \frac{1}{9}$$

Per differenza, la frequenza relativa con cui si estraggono un maschio e una femmina sarà

$$1 - \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{4}{9}$$

Quindi la risposta esatta è la A.

☞ Per il calcolo del numero totale e dei numeri parziali di abbinamenti bisogna tenere conto delle modalità di sorteggio: così, nel nostro caso, i possibili abbinamenti sono in totale N^2 perché la *prima* matricola può essere estratta in N modi diversi, e anche la *seconda* matricola può essere estratta in N modi diversi (si parla in questo caso di *due estrazioni con reimmissione*). Se invece, ad es., il sorteggio avvenisse *in blocco* (cioè si estraggono in un solo colpo due matricole, per forza fra loro differenti), il totale dei possibili abbinamenti sarebbe $\frac{N(N-1)}{2}$ perché la prima matricola può essere estratta in N modi diversi, la seconda matricola in $N-1$ modi diversi, e poi bisogna dividere per 2 perché l'ordine di estrazione non conta.

⚓ *Frequenza relativa; calcolo della frequenza relativa di coppie di un certo tipo in una popolazione.*

---

112. La seguente tabella rappresenta la distribuzione dei redditi annuali (in migliaia di euro) di una certa collettività di persone

reddito	≤ 10	≤ 20	≤ 30	≤ 50	> 50
% di persone	28%	47%	73%	94%	6%

Se ne deduce che

A. le persone con reddito inferiore a 10 000€ sono meno di quelle che hanno un reddito superiore a 30 000€

B. le persone con reddito inferiore a 20 000€ sono tante quante quelle che hanno un reddito compreso fra 20 000€ e 50 000€

C. il 60% delle persone ha un reddito inferiore a 25 000€

D. il 20% delle persone ha un reddito superiore a 40 000€

E. nessuno ha un reddito di 5 000€

Statistica; interpretazione di tabelle di percentuali.

Si tratta di interpretare bene quanto scritto nella tabella. Occorre capire che le colonne sono tra loro *cumulative*: ad esempio, chi ha reddito ≤ 10 ha anche reddito ≤ 20, quindi il 28% di popolazione che compare nella prima colonna è una parte del 47% di popolazione che compare nella seconda. Ne segue che, ad esempio, per sapere quale percentuale ha reddito compreso tra 10 e 20 (cioè ≤ 20 *ma non* ≤ 10) dovremo calcolare la differenza $47\% - 28\% = 19\%$.

Con questo chiarimento iniziale, riscriviamo le 5 risposte calcolando, in base alla tabella, le percentuali delle classi a cui si riferiscono.

A. Le persone con reddito inferiore a 10 000€ (= 28%) sono meno di quelle che hanno un reddito superiore a 30 000€ ($= 100\% - 73\% = 17\%$): Falso.

B. Le persone con reddito inferiore a 20 000€ (= 47%) sono tante quante quelle che hanno un reddito compreso fra 20 000€ e 50 000€ ($= 94\% - 47\% = 47\%$): Vero.

C. Il 60% delle persone ha un reddito inferiore a 25 000€: la tabella non consente di dedurlo (il valore 25 000€ non compare in tabella), quindi la risposta C è falsa.

D. Il 20% delle persone ha un reddito superiore a 40 000€: la tabella non consente di dedurlo (il valore 40 000€ non compare in tabella), quindi la risposta D è falsa.

E. Nessuno ha un reddito di 5 000€: la tabella non consente di dedurlo (il valore 5 000€ non compare in tabella), quindi la risposta E è falsa.

La risposta esatta è la B.

Percentuali assolute e cumulative di classi.

---

113. Consideriamo la serie di 4 numeri:

$$S_1 = \{0; 2; 4; 10\}$$

e la serie S_2, pure di 4 numeri, ottenuta moltiplicando per 3 ciascun elemento di S_1. Siano v_1 la varianza dei numeri di S_1 e v_2 la varianza dei numeri di S_2. Allora

A. $v_2 = v_1^3$

B. $v_2 = 3v_1$

C. $v_2 = 9v_1$

D. $v_2 = v_1 + 9$

E. $v_2 = v_1 + 3$

Statistica; varianza.

La *varianza* di un insieme di numeri è la media dei quadrati delle differenze tra i singoli numeri e la loro media. Nel nostro caso la serie S_1 ha media

$$m_1 = \frac{0+2+4+10}{4} = 4$$

e quindi la sua varianza vale

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{4}\left\{(0-4)^2 + (2-4)^2 + (4-4)^2 + (10-4)^2\right\} \\ &= \frac{16+4+0+36}{4} = \frac{56}{4} = 14 \end{aligned}$$

La serie S_2 si ottiene moltiplicando per 3 i numeri di S_1

$$S_2 = \{0; 6; 12; 30\}$$

La sua media è

$$m_2 = \frac{0+6+12+30}{4} = 12$$

e la sua varianza

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{4}\left\{(0-12)^2 + (6-12)^2 + (12-12)^2 + (30-12)^2\right\} \\ &= \frac{144+36+0+324}{4} = \frac{504}{4} = 126 \end{aligned}$$

Si constata subito che $126 = 9 \times 12$, e quindi la risposta esatta è la C.

Calcolo di medie e varianze.

---

114. Quanti sono i sottoinsiemi di 3 elementi contenuti in un dato insieme di 6 elementi?

A. 2

B. 9

C. 20

D. 40

E. 120

Statistica; conteggi.

Dato un insieme X avente 6 elementi, in quanti modi possiamo sceglierne 3? (Il numero dei modi in cui si può fare questa scelta sarà uguale al numero dei sottoinsiemi di X aventi 3 elementi). Chi ha studiato (e ricorda!) un po' di calcolo combinatorio, riconoscerà nel quesito una situazione tipica: il numero dei sottoinsiemi formati da 3 degli elementi di un insieme che ne contiene 6 in tutto, si calcola con il *coefficiente binomiale*

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$$

Chi non ha studiato (o non ricorda) queste cose, può arrivare alla risposta esatta ragionando secondo uno "schema ad albero" (v. quesito n° 108). Il primo elemento può essere scelto in 6 modi diversi; il secondo elemento può essere allora scelto tra i 5 rimanenti, e infine il terzo tra i 4 rimanenti. Complessivamente, questo dà

$$6 \times 5 \times 4 \qquad \text{scelte}$$

Così facendo, però, abbiamo contato più volte lo stesso sottoinsieme: infatti, indicando ad esempio con a, b, c tre elementi di X, è chiaro che le scelte $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, a, c\}$, ... individuano lo stesso insieme. Precisamente, in quanti modi possiamo *permutare* tra loro 3 elementi (cioè scambiarli di posto tra loro)? Per rispondere, ragioniamo al solito modo: al primo posto possiamo mettere un elemento qualsiasi scelto fra questi 3, al secondo posto uno scelto tra i 2 rimanenti, al terzo posto mettiamo l'oggetto rimasto; in totale le permutazioni di 3 oggetti sono 3×2. Quindi il numero di sottoinsiemi formati da 3 degli oggetti di X si ottiene dividendo il numero $6 \times 5 \times 4$ (scelte di 3 oggetti disposti in un certo ordine) per il numero 3×2 di modi in cui possiamo scambiare di posto i 3 oggetti scelti senza cambiare il sottoinsieme. Ritroviamo come risultato

$$\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$$

Pertanto la risposta esatta è la C.

⚓ *Combinazioni e coefficienti binomiali; permutazioni.*

---

115. Se si lancia una moneta regolare, le possibilità che esca Testa oppure Croce sono le medesime: si dice allora che la frequenza con cui esce Testa (oppure Croce) è $1/2$. Lanciando tre volte una moneta regolare, con quale frequenza usciranno 2 Teste e 1 Croce?

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

E. $\frac{2}{3}$

Statistica; conteggi, frequenze relative.

I possibili risultati di 3 lanci si possono rappresentare come sequenze di 3 esiti T (Testa) o C (Croce). Il numero totale di sequenze di questo tipo è $2 \times 2 \times 2 = 8$ (ad ognuno dei 3 lanci abbiamo 2 scelte), come si vede anche costruendo uno schema ad albero:

T C

TT TC CT CC

TTT $\boxed{\text{TTC}}$ $\boxed{\text{TCT}}$ TCC $\boxed{\text{CTT}}$ CTC CCT CCC

Di queste 8 sequenze, solo le tre evidenziate contengono 2 Teste e 1 Croce. Quindi la frequenza con cui usciranno 2 Teste e 1 Croce è data dal rapporto $\frac{3}{8}$.

La risposta esatta è la B.

Il quesito fa leva su due diversi ingredienti. Il primo è la capacità di *conteggiare* il numero di sequenze di un certo tipo (calcolo combinatorio, ragionamento su "schemi ad albero"); il secondo è invece la nozione di *frequenza* (relativa) di un certo tipo di esito, come rapporto tra numero di casi di un certo tipo e numero totale dei casi. Questo è un concetto di *statistica* elementare, che corrisponde anche al concetto di *probabilità* elementare come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili. Avere i primi rudimenti di statistica o di probabilità, quindi, aiuta a individuare il ragionamento corretto.

Conteggio del numero di casi in uno schema ad albero; calcolo di frequenze relative.

---

116. Aldo ha superato 9 esami universitari; la media dei suoi voti (espressi in trentesimi) è 24. Qual è il voto *minimo* che Aldo dovrà prendere nel decimo esame affinché la sua media diventi almeno $24,5$?

A. 26

B. 27

C. 28

D. 29

E. 30

Statistica; media.

Sappiamo che

$$24 = \text{media dei primi 9 esami} = \frac{\text{somma dei punteggi dei primi 9 esami}}{9}$$

da cui ricaviamo che

$$\text{somma dei punteggi dei primi 9 esami} = 24 \times 9 = 216$$

Quindi, se indichiamo con x il voto del decimo esame, la somma dei punteggi dei primi 10 esami sarà $216 + x$, e

$$\text{media sui primi 10 esami} = \frac{\text{somma dei punteggi dei primi 10 esami}}{10} = \frac{216 + x}{10}$$

Se vogliamo che questa media sia $\geq 24,5$ dovrà essere

$$\begin{aligned} \frac{216 + x}{10} &\geq 24,5 \\ 216 + x &\geq 245 \\ x &\geq 245 - 216 = 29 \end{aligned}$$

Aldo quindi deve prendere almeno 29. Sarà bene che si dia da fare! Per intanto, la risposta esatta è la D.

Calcolo di medie.

---

117. Il diagramma seguente riporta i dati ufficiali (in valori assoluti) delle assunzioni annuali di ingegneri in Italia nel periodo 2001-2005. Prendendo come base di riferimento (= 100%) il 2001, dal diagramma si può ricavare che le percentuali di assunzioni negli anni successivi sono

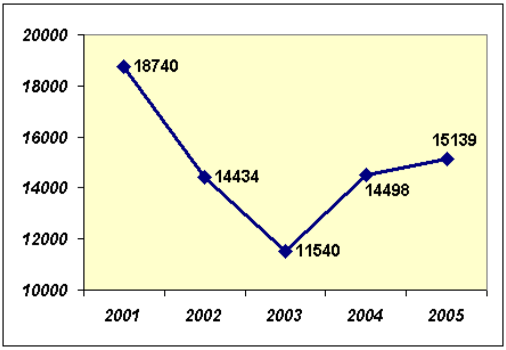
A. $2002 = 77,4\%$; $2003 = 61,6\%$; $2004 = 77,0\%$; $2005 = 80,8\%$

B. $2002 = 61,6\%$; $2003 = 77,0\%$; $2004 = 80,8\%$; $2005 = 77,4\%$

C. $2002 = 77,0\%$; $2003 = 61,6\%$; $2004 = 80,8\%$; $2005 = 77,4\%$

D. $2002 = 77,4\%$; $2003 = 61,6\%$; $2004 = 77,0\%$; $2005 = 80,8\%$

E. $2002 = 77,0\%$; $2003 = 61,6\%$; $2004 = 77,4\%$; $2005 = 80,8\%$



Statistica; interpretazione di diagrammi.

Il quesito chiede di trasformare i valori assoluti riportati nel diagramma in percentuali. I valori assoluti sono

2001	2002	2003	2004	2005
18 740	14 434	11 540	14 498	15 139

e quindi i valori percentuali (posto 100 il valore del 2001) si ottengono con il calcolo

2001	2002	2003	2004	2005
100	$\frac{14\,434}{18\,740} \times 100$	$\frac{11\,540}{18\,740} \times 100$	$\frac{14\,498}{18\,740} \times 100$	$\frac{15\,139}{18\,740} \times 100$

Senza una calcolatrice, però, il calcolo esatto non è agevole, per cui conviene cercare la risposta esatta tra quelle proposte con un confronto più qualitativo che quantitativo.
Cominciamo a notare che l'andamento nel passare da un anno al successivo è: diminuzione; diminuzione; aumento; aumento. Questo è vero per A, D, E, ma non per B e C (in entrambe, l'ultimo valore è più basso del penultimo). Quindi scartiamo B e C.
Confrontiamo i valori assoluti dei 5 anni con le percentuali fornite dalle risposte A, D, E:

	2001	2002	2003	2004	2005
	18 740	14 434	11 540	14 498	15 139
A	100	77,4	61,6	77,0	80,8
D	100	77,4	61,6	77,0	80,8
E	100	77,0	61,6	77,4	80,8

Osserviamo i valori degli anni 2002 e 2004: in valore assoluto, il 2004 ha un valore più alto del 2002, quindi questo dev'essere vero anche in percentuale. Le risposte A e D contraddicono questo fatto, e vanno scartate. Per esclusione, la risposta esatta è la E.

Calcolo di percentuali.

Capitolo 7

Trigonometria

118. La misura in radianti di un angolo di $20°$ è

A. $\dfrac{\pi}{7}$

B. $\dfrac{\pi}{8}$

C. $\dfrac{\pi}{9}$

D. $\dfrac{\pi}{10}$

E. $\dfrac{\pi}{18}$

Trigonometria; misura degli angoli.

Ricordiamo che un angolo di π radianti corrisponde a un angolo di $180°$. Poiché

$$20° = \frac{180°}{9}$$

la misura in radianti dell'angolo di $20°$ è $\dfrac{\pi}{9}$. Quindi la risposta esatta è la C.

Conversione delle misure degli angoli da gradi a radianti.

119. Siano α e β due angoli legati fra di loro dalla relazione $\beta = \pi - \alpha$. Quale delle seguenti uguaglianze è vera?

A. $\sin\alpha + \sin\beta = 0$

B. $\cos\alpha + \cos\beta = -1$

C. $\tan\alpha + \tan\beta = 0$

D. $\cos\alpha = \cos\beta$

E. $\tan\alpha = \tan\beta$

Trigonometria; angoli supplementari.

Gli angoli α e β sono *supplementari* (la loro somma è π), quindi – come si constata, ad es., sulla circonferenza trigonometrica) – soddisfano le relazioni

$$\sin\alpha = \sin\beta \qquad ; \qquad \cos\alpha = -\cos\beta$$

Nessuna di queste due compare tra le risposte proposte, tuttavia A, B e D vanno scartate perché in contrasto con queste uguaglianze. Le altre due risposte riguardano la funzione tangente. Notiamo che dalle due uguaglianze scritte sopra segue anche

$$\tan\alpha = -\tan\beta$$

che è equivalente alla C (e in contraddizione con la E). Quindi la risposta esatta è la C.

Relazione tra seno, coseno e tangente di angoli supplementari.

---

120. Se un angolo misura $15°$, la sua misura in radianti è

A. minore di $0,25$ rad

B. compresa fra $0,25$ rad e $0,50$ rad

C. compresa fra $0,50$ rad e $0,75$ rad

D. compresa fra $0,75$ rad e 1 rad

E. maggiore di 1 rad

Trigonometria; misura degli angoli.

Ricordiamo che un angolo di π radianti corrisponde a un angolo di $180°$. Poiché

$$15° = \frac{180°}{12}$$

l'angolo di $15°$ misura $\dfrac{\pi}{12}$ rad.

Quanto vale all'incirca il numero $\pi/12$ in forma decimale? Invece che dividere $3,14$ (un'approssimazione di π) per 12, ragioniamo così: π è "poco più" di 3, quindi $\pi/12$ è "poco più" di $3/12$, cioè di $1/4$. Quindi l'angolo misura "poco più" di $1/4$ rad, e la risposta esatta è la B.

(Il risultato della divisione di $3,14$ per 12, eseguita con carta e penna, dà il valore troncato $0,26$.)

Conversione delle misure degli angoli da gradi a radianti; confronti numerici.

---

121. L'espressione

$$\cos^2 1 - \sin^2 1$$

è uguale a

A. $-\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$

B. $\cos 2$

C. 1

D. $2\cos 1 - 2\sin 1$

E. $-\dfrac{1}{2}$

Trigonometria; identità trigonometriche.

Anzitutto, osserviamo che l'angolo di 1 rad *non* rappresenta un valore notevole per le funzioni seno e coseno, quindi occorre resistere alla tentazione di scegliere frettolosamente, tra le risposte, una che dia per risultato una "cifra tonda". L'espressione del testo ci suggerisce invece di usare l'identità

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

Applicata ad $\alpha = 1$, essa dà

$$\cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos 2$$

Quindi la risposta esatta è la B.

Formule di duplicazione.

---

122. L'uguaglianza

$$\cos 2x = \cos^4 x - \sin^4 x$$

è verificata

A. solo per $x = \dfrac{\pi}{2}$

B. per infiniti valori di x, ma non per ogni x reale

C. per ogni x reale

D. per nessun x reale

E. solo per $x = 0$

Trigonometria; identità trigonometriche.

Osserviamo che

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(formula di duplicazione), mentre

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(prodotto notevole $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, e relazione fondamentale della trigonometria $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$), quindi le due espressioni scritte sono identicamente uguali. La risposta esatta è la C.

Lo studente constati che l'uguaglianza data è verificata per i due valori notevoli $x = \pi/2$ e $x = 0$. Questo fatto porta a concludere che A, D, E sono risposte errate. Ma per scegliere la risposta giusta tra B e C bisogna ragionare come si è detto.

Identità fondamentale della trigonometria; formula di duplicazione; prodotti notevoli.

---

123. Sia α la misura in radianti di un angolo con $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Se è

$$\cos\alpha = \frac{1}{4}$$

allora

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

è uguale a

A. $\frac{1+\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}$

B. $\frac{-1+\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}$

C. $\frac{-1-\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}$

D. $\frac{1-\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}$

E. $\frac{3}{4}$

Trigonometria; identità trigonometriche.

Per le formule di addizione, si ha

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4} =$$

(poiché $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$)

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$$

Ora sfruttiamo le altre informazioni: α del quarto quadrante e $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$, perciò

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

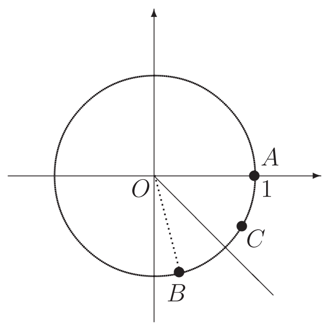
In conclusione

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}$$

e la risposta esatta è la D.

☞ Una figura anche piuttosto grossolana avrebbe potuto convincere a priori che l'angolo $\alpha + \pi/4$ si trova nel quarto quadrante, e quindi ha seno negativo.

(Si disegni, sulla circonferenza trigonometrica, l'angolo α che si trova nel quarto quadrante e ha coseno $1/4$ – individuato nella figura seguente dall'arco che va dal punto A al punto B di ascissa $1/4$ – e poi lo si incrementi di mezzo angolo retto. Si ottiene così il punto C in figura e l'angolo $\alpha + \pi/4$ è quello che insiste sull'arco AC.)



Questa costruzione geometrica avrebbe permesso di scartare subito tutte le risposte tranne due: C e D. Per scegliere la risposta esatta, comunque, è necessario il calcolo.

⚓ *Formule di addizione; relazioni tra seno e coseno di un angolo, in base al quadrante.*

---

124. Il triangolo $\mathcal{T}$ ha un lato lungo 1 cm, un altro lato lungo $2\sqrt{2}$ cm e l'angolo tra essi compreso è di 60°. Allora

A. $\mathcal{T}$ è rettangolo

B. l'area di $\mathcal{T}$ è uguale a $\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm^2

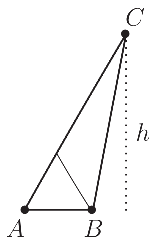
C. $\mathcal{T}$ è isoscele

D. l'area di $\mathcal{T}$ è uguale a $\sqrt{6}$ cm^2

E. l'area di $\mathcal{T}$ è uguale a $2\sqrt{2}$ cm^2

Trigonometria; applicazioni geometriche della trigonometria.

Disegnamo un triangolo equilatero di lato $\overline{AB} = 1$ e un segmento AC, come in figura, lungo circa 3 (perché $2\sqrt{2} \simeq 2 \times 1,41 = 2,82$).



Allora il triangolo ABC è il triangolo $\mathcal{T}$ del testo, e dall'osservazione della figura non sembra che $\mathcal{T}$ sia né isoscele né rettangolo. Quindi le risposte A e C saranno false; poiché le altre risposte dicono quanto vale l'area, calcoliamola.

Chiamiamo h l'altezza relativa al lato di lunghezza 1 di $\mathcal{T}$. Si ha

$$h = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$$

(Non è comunque necessaria la trigonometria per questo calcolo: si può anche notare che h è l'altezza di un triangolo equilatero di lato $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$.)

Quindi l'area di $\mathcal{T}$ è uguale a

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

e la risposta esatta è la B.

Risoluzione dei triangoli rettangoli; area del triangolo.

---

125. L'ombra di un campanile è lunga la metà della sua altezza. Detta $\alpha°$ la misura (in gradi) dell'angolo formato dal sole sull'orizzonte in quel momento, si può dire che

A. $\alpha° < 30°$

B. $30° \leq \alpha° < 45°$

C. $45° \leq \alpha° < 60°$

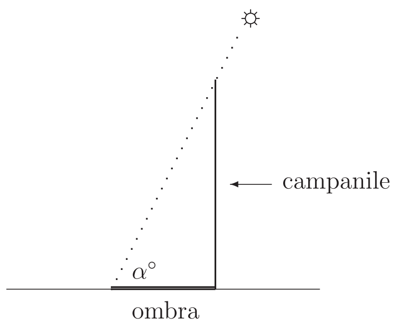
D. $60° \leq \alpha°$

E. è notte

Trigonometria; applicazioni geometriche della trigonometria.

Dire che "L'ombra di un campanile è lunga la metà della sua altezza" significa

$$\tan \alpha° = 2$$



Confrontando con il valore notevole

$$\tan 60° = \sqrt{3} < 2 = \tan \alpha°$$

si deduce che $60° < \alpha°$, e la risposta esatta è la D.

Definizione e valori notevoli della funzione $\tan x$.

---

126. La misura (in gradi) dell'angolo al centro di un settore circolare, avente raggio di 12 cm e limitato da un arco di 3 cm, è uguale a

A. 36°

B. 4°

C. circa 15°

D. circa 30°

E. maggiore di 40°

Trigonometria; arco di circonferenza.

Se l'angolo al centro è misurato in radianti, e la sua misura è α, vale la semplice relazione

$$\text{lunghezza dell'arco} = \alpha \times \text{lunghezza del raggio}$$

ossia $3 = \alpha \times 12$, e quindi

$$\alpha = \frac{3}{12}\ \text{rad} = \frac{1}{4}\ \text{rad}$$

Si tratta ora di convertire tale misura dai radianti ai gradi. La conversione esatta si fa mediante la formula

$$\alpha^\circ = \alpha \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{45^\circ}{\pi}$$

ma, non avendo a disposizione la calcolatrice e non volendo fare il conto a mano, facciamo il seguente ragionamento (grossolano ma efficace): π è circa 3, quindi α° è circa 15°. Poiché questa è la risposta C (e le altre risposte propongono valori molto lontani da questo, quindi non possono rappresentare una misura più accurata), la risposta esatta è la C.

(Eseguendo la divisione $\dfrac{45^\circ}{3,14}$ con carta e penna, si ottiene il valore troncato 14°.)

Conversione delle misure degli angoli da radianti a gradi; relazione tra arco ed angolo al centro in una circonferenza.

---

127. Quali delle seguenti relazioni sono verificate per qualunque valore dell'angolo α nel primo quadrante?

$$\text{(a)} \qquad \cos\alpha + \sin\alpha \geq 1$$

$$\text{(b)} \qquad \cos\alpha + \sin\alpha = 1$$

$$\text{(c)} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$$

A. Le relazioni (a) e (c), ma non la (b)

B. Le relazioni (a) e (b), ma non la (c)

C. Le relazioni (b) e (c), ma non la (a)

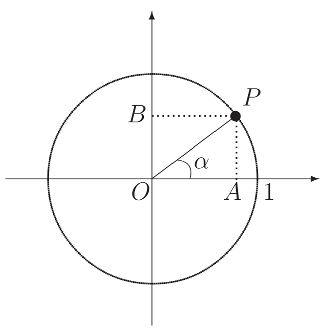
D. Solo la relazione (b)

E. Solo la relazione (c)

Trigonometria; funzioni trigonometriche.

Un minimo di familiarità con le funzioni seno e coseno porta subito a riconoscere che (b) è falsa. Ad esempio, per $\alpha = \pi/4$, $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$ valgono entrambi $\sqrt{2}/2$, quindi la loro somma è $\sqrt{2} > 1$. Questa osservazione è sufficiente per concludere che B, D, E sono sicuramente false perché tutte e tre affermano la verità di (b).

Resta da scegliere tra A ed E. Entrambe affermano la verità di (c), quindi (c) è certamente vera ed è inutile controllarlo. Invece la A dice che (a) è vera, mentre la E lo nega. Occupiamoci allora della (a).



Ricordando il significato geometrico del seno e del coseno di un angolo sulla circonferenza trigonometrica (v. figura), la (a) afferma che nel triangolo rettangolo OAP la somma delle lunghezze dei cateti $\overline{OA} = \cos\alpha$ e $\overline{AP} = \sin\alpha$ non è mai minore della lunghezza dell'ipotenusa $\overline{OP} = 1$, il che è vero per una nota proprietà dei triangoli. Dunque la risposta esatta è la A.

Verifichiamo che la relazione (c) è vera (anche se non è necessario farlo per rispondere al quesito):

$$\frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha$$

Relazioni tra le funzioni trigonometriche; relazioni tra i lati di un triangolo.

---

128. Se l'angolo α si trova nel secondo quadrante ed è

$$\cot\alpha = \sqrt{3} - 2$$

allora $\sin\alpha$ vale

A. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

B. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

C. $-\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

D. $-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

E. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

Trigonometria; funzioni trigonometriche.

✎ Se α sta nel secondo quadrante, allora $\sin\alpha > 0$. Di conseguenza le risposte A, D, E sono sicuramente sbagliate, perché esprimono numeri negativi; rimane da scegliere tra B e C, e per far questo occorre esprimere $\sin\alpha$ in termini di $\cot\alpha$. Da

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ricaviamo

$$\cot^2\alpha = \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$$

e quindi

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha &= \frac{1}{1+\cot^2\alpha} = \frac{1}{1+\left(\sqrt{3}-2\right)^2} = \\ &= \frac{1}{8-4\sqrt{3}} = \frac{1}{4\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

Confrontiamo ora il valore trovato per $\sin^2\alpha$ con quello che si ricava dalle risposte B e C.

La B afferma $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, e quindi

$$\sin^2\alpha = \frac{2+6+2\sqrt{12}}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

che concorda con quanto trovato.

La C afferma invece $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, e quindi (con calcoli analoghi)

$$\sin^2\alpha = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Perciò la risposta esatta è la B.

⚓ *Funzioni* $\sin x$, $\cos x$, $\cot x$, *loro relazioni e loro segno nei vari quadranti.*

---

129. L'espressione

$$\sin 31^\circ + \sin 29^\circ$$

è uguale a

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 1

D. $\cos 1^\circ$

E. $\sin 1^\circ$

Trigonometria; identità trigonometriche.

I valori 31°, 29° si possono vedere come $30^\circ + 1^\circ$, $30^\circ - 1^\circ$, rispettivamente. Questo suggerisce di usare l'identità (formule di addizione e sottrazione)

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ &= 2\sin\alpha\cos\beta\end{aligned}$$

che per $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 1^\circ$ dà

$$\sin 31^\circ + \sin 29^\circ = 2\sin 30^\circ\cos 1^\circ = 2\frac{1}{2}\cos 1^\circ = \cos 1^\circ$$

Pertanto la risposta esatta è la D.

In questo quesito la strada da seguire emerge naturalmente se si hanno *ben in mente* le formule di addizione e sottrazione per la funzione seno (oltre al fatto che 30° sia un angolo notevole per le funzioni trigonometriche).

Valore delle funzioni trigonometriche per angoli notevoli; formule di addizione e sottrazione.

---

130. In una circonferenza di raggio r la lunghezza della corda sottesa ad un arco di lunghezza uguale al raggio è

A. $2r \cos 0,5$

B. $\dfrac{r}{2}$

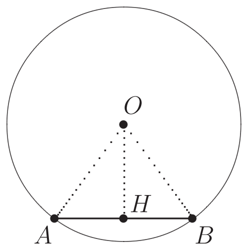
C. $2r \sin 0,5$

D. $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$

E. $r \sin 1$

Trigonometria; applicazioni geometriche della trigonometria.

Sia α l'angolo al centro relativo alla corda e all'arco di cui parla il quesito. Dire che l'arco è uguale al raggio significa che α misura 1 rad (questa è proprio una delle possibili definizioni di radiante). D'altro canto (vedi figura) la metà della corda AB si può vedere come cateto AH del triangolo rettangolo OAH, la cui ipotenusa è lunga $\overline{OA} = r$, e $\widehat{HOA} = \alpha/2 = 0,5$ rad.



Quindi $\overline{AH} = r \sin 0,5$ e

$$\overline{AB} = 2 \times \overline{AH} = 2r \sin 0,5$$

Pertanto la risposta esatta è la C.

Misura degli angoli in radianti; relazione tra arco, raggio e angolo al centro in una circonferenza; risoluzione dei triangoli rettangoli.

Finito di stampare
presso Litogì s.a.s.
nel mese di febbraio 2008

Questo libro è un aiuto importante per i tanti studenti intenzionati ad intraprendere gli studi di ingegneria nel nostro Ateneo e, forse, anche per gli insegnanti che stanno preparando i loro allievi ad entrare in università col desiderio di assistere al loro successo.

Giulio Ballio
Rettore del Politecnico di Milano

ISBN 9788873980236

copia
omaggio