Capitolo 1

Aritmetica

1. La somma $2^{15} + 2^{15}$ è uguale a

   A. 2^{30}

   B. 2^{16}

   C. 4^{15}

   D. un numero irrazionale

   E. 4^{30}

Aritmetica; numeri interi; potenze.

Si ha

$$2^{15} + 2^{15} = 2 \times 2^{15} = 2^{16}$$

La risposta esatta è la B.

La proprietà delle potenze che si è usata (e che si studia a scuola) riguarda il prodotto di due potenze di uguale base ($a^m a^n = a^{m+n}$); non c'è invece nessuna proprietà per la somma $a^m + a^n$ (e non la si studia proprio perché non c'è). Le risposte errate A, C ed E riflettono vari errori di calcolo, basati proprio su presunte proprietà per la somma. Infine, la risposta D è chiaramente assurda perché 2^{15} è certamente un intero e quindi lo è anche $2^{15} + 2^{15}$.

Proprietà delle potenze.

---

2. Si considerino i seguenti numeri

$$91 \qquad 100 \qquad 231 \qquad 440 \qquad 1003$$

Quanti di essi sono numeri primi?

A. Nessuno

B. Uno

C. Due

D. Tre

E. Quattro

Aritmetica; numeri interi; numeri primi.

I numeri 100 e 440 non sono primi perché pari (divisibili per 2).

Il numero 231 non è primo perché è divisibile per 3 (si ricordi il criterio di divisibilità per 3: "se la somma delle cifre di un numero è divisibile per 3, il numero è divisibile per 3"; nel nostro caso $2 + 3 + 1 = 6$ è divisibile per 3, quindi lo è anche 231).

Il numero 91 è primo? Ricordiamo che, in generale, per decidere se n è primo occorre verificare che non sia divisibile per nessun numero primo $\leq \sqrt{n}$. Osserviamo poi che per i criteri di divisibilità, 91 non è divisibile per $2, 3, 5$; è divisibile per 7? Sì, perché

$$91 = 70 + 21 = 7 \times 10 + 7 \times 3 = 7 \times 13$$

Il numero 1003 è primo? I criteri di divisibilità dicono che non è divisibile per $2, 3, 5, 11$. Per essere certi che sia primo, dobbiamo verificare che non sia divisibile per nessun numero primo $\leq \sqrt{1003}$, ossia (oltre a quelli già elencati), per

$$7, 13, 17, 19, 23, 29, 31$$

Carta, penna e pazienza ci dicono che

1003 diviso 7 dà 143 e resto 2;
1003 diviso 13 dà 77 e resto 2;
1003 diviso 17 dà 59 e resto 0

Dunque $1003 = 17 \times 59$, e neanche 1003 è primo. Quindi la risposta esatta è la A.

Ricerca dei fattori primi di un intero; criteri di divisibilità.

3. Nel sistema di numerazione ternaria le tre sole cifre usate sono 0, 1 e 2. Quindi, ad esempio, si hanno le uguaglianze seguenti (nelle quali il numero in basso ricorda la base):

$$0_{10} = 0_3, \quad 1_{10} = 1_3, \quad 2_{10} = 2_3, \quad 3_{10} = 10_3, \quad 4_{10} = 11_3, \quad 5_{10} = 12_3$$

eccetera. Quale dei seguenti numeri è 912_{10} in forma ternaria?

A. 12101_3

B. 20121_3

C. 1020210_3

D. 210212_3

E. 1010101_3

Aritmetica; numeri interi; rappresentazione di un numero intero in base 3.

Bisogna sapere che se un numero intero positivo è rappresentato in base 3 dalla sequenza di (diciamo) $k+1$ cifre

$$a_k\, a_{k-1} ... \, a_2\, a_1\, a_0$$

dove ogni cifra vale 0, 1 o 2, allora la sua rappresentazione in base 10 sarà data da

$$a_k \times 3^k + a_{k-1} \times 3^{k-1} + ... + a_2 \times 3^2 + a_1 \times 3^1 + a_0 \times 3^0$$

Per identificare la risposta corretta si può allora procedere tramite controllo diretto: ad esempio il numero 12101_3 della risposta A è formato da 5 cifre e quindi corrisponde a

$$1 \times 3^4 + 2 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 81 + 54 + 9 + 0 + 1 = 145_{10}$$

Il fatto che il valore 145 sia piuttosto lontano da 912 suggerisce a questo punto che la risposta corretta sarà probabilmente data da una delle due rappresentazioni più lunghe (la C o la E). Per la C si trova

$$1 \times 3^6 + 0 \times 3^5 + 2 \times 3^4 + 0 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 0 \times 3^0 = 729 + 162 + 18 + 3 = 912_{10}$$

per cui la risposta esatta è la C.

Rappresentazione di un numero intero in base diversa da quella decimale.

---

4. Siano a e b due interi positivi tali che il loro prodotto ab sia multiplo di 10. Allora

A. a e b sono entrambi pari

B. a e b sono entrambi multipli di 10

C. a è multiplo di 10 oppure b è multiplo di 10

D. a è pari e b è multiplo di 5

E. a è pari oppure b è pari

Aritmetica; numeri interi.

Il testo dice che il prodotto ab può essere uguale a $10, 20, 30, ...$ e che a e b sono interi positivi, cioè possono assumere i valori $1, 2, 3, ...$ Basta considerare il caso $ab = 10$ ed esplicitare in una tabella i valori corrispondenti di a e di b per constatare che le risposte A, B, C e D sono false.

$a =$	1	2	5	10
$b =$	10	5	2	1
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	
	A e B false	C falsa	D falsa	

Per esclusione la risposta esatta è la E.

Abbiamo individuato indirettamente la risposta esatta mostrando che 4 delle 5 risposte sono false. Volendo invece fare un ragionamento diretto, si può procedere così.

Il punto di partenza è la seguente proprietà dei numeri primi:

> “Se un numero *primo* p divide ab, allora p divide a oppure divide b”

(per inciso facciamo notare che tale proprietà non vale se p non è primo: ad esempio, il numero $p = 6$ divide $4 \times 9 = 36$, ma non divide né $a = 4$ né $b = 9$).
Poiché $10 = 2 \times 5$ e ab è multiplo di 10, in particolare ab è multiplo sia di 2 che di 5, che sono numeri primi. Perciò si può concludere che

2 divide a oppure divide b, e inoltre 5 divide a oppure divide b.

Leggendo ora le risposte, si vede che l'unica ad essere conseguenza di questa affermazione è la E (se 2 divide a o b, allora a è pari oppure b è pari).

Scomposizione di un numero intero in fattori primi, numeri primi e divisibilità.

---

5. Se una certa operazione sugli elementi di un insieme ha come risultato un elemento dell'insieme si usa dire che tale insieme è *chiuso* rispetto a questa operazione.
L'insieme X dei quadrati degli interi positivi

$$X = \{1, 4, 9, 16, ...\}$$

è chiuso rispetto

A. all'addizione

B. alla moltiplicazione

C. alla divisione

D. all'estrazione di radice quadrata

E. a nessuna operazione

Aritmetica; numeri interi; potenze.

L'insieme X è costituito dai numeri n^2, al variare di n tra gli interi positivi. Presi due generici numeri di X, n^2 e m^2, si vede subito che

$$n^2m^2 = (nm)^2$$

ossia: il prodotto di due elementi di X è un elemento di X. Dunque la risposta B è esatta.

Osserviamo che, viceversa,

la somma o il quoziente di due quadrati in generale non è un quadrato (es. $2^2 + 3^2 = 13$ non è un quadrato, e $2^2/3^2 = 4/9$ non è neppure un intero);

la radice di un quadrato in generale non è un quadrato (es. $\sqrt{2^2} = 2$ non è un quadrato).

Proprietà delle potenze.

---

6. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   A. Se x è un numero irrazionale, anche x^2 lo è

   B. Se x è un numero razionale, anche $x + \pi$ lo è

   C. Se x è un numero irrazionale, allora $x^2 + \pi$ non può essere intero

   D. Se x è un numero irrazionale, allora $x/2$ può essere razionale

   E. Se x è un numero irrazionale, allora $x + \pi$ può essere intero

Aritmetica; numeri razionali e irrazionali.

La A è falsa: ad esempio, $x = \sqrt{2}$ è irrazionale, ma $x^2 = 2$ è intero (e quindi razionale).

La B è falsa: ad esempio, $x = 0$ è razionale, ma $x + \pi = 0 + \pi = \pi$ è irrazionale.

La C è falsa: ad esempio, se $x = \sqrt{4 - \pi}$, x è irrazionale, ma $x^2 + \pi = 4 - \pi + \pi = 4$ è intero.

La D è falsa: se $x/2$ è razionale, anche x (che è il suo doppio) è razionale; perciò, viceversa, se x è irrazionale allora $x/2$ non può essere razionale.

La E è vera: ad esempio, $x = -\pi$ è irrazionale, eppure $x + \pi = -\pi + \pi = 0$ è intero.

Perciò la risposta esatta è la E.

L'insieme di tutti i numeri razionali costituisce un *campo*, quindi eseguendo somme, differenze, prodotti e quozienti sui numeri razionali, otteniamo ancora numeri razionali. Lo stesso vale per i numeri reali. Invece i numeri irrazionali sono quei numeri reali che non sono razionali: questo insieme numerico non è un campo, perciò non è *chiuso* rispetto alle operazioni aritmetiche (v. quesito n° 5). È questo il motivo per cui, di fronte alle affermazioni proposte in questa domanda, dobbiamo anzitutto diffidare e cercare un controesempio. Il controesempio, per le quattro risposte errate, è molto facile da trovare, tranne forse per la C. In quel caso, il modo naturale di ragionare è:

"Per mostrare che la frase C è falsa, devo far sì che sia $x^2 + \pi = n$ con n intero, ossia $x^2 = n - \pi$"

Dovremo allora scegliere un intero $n > \pi$ (perché $x^2 \geq 0$), ad es. $n = 4$, e poi porre $x = \sqrt{4 - \pi}$. Questo numero è effettivamente irrazionale perché, se fosse razionale, anche il suo quadrato $x^2 = 4 - \pi$ lo sarebbe, e quindi lo sarebbe π, assurdo.

Operazioni aritmetiche sui numeri razionali e irrazionali; irrazionalità di π.

---

7. Indicato con n un qualunque intero, l'espressione

$$\left(2^n + 2^{n+1}\right)^2$$

è uguale a

A. 9×4^n

B. 2^{4n+2}

C. 4^{4n+2}

D. 2^{2n^2+2n}

E. $9 \times 2^{n^2}$

Aritmetica; numeri interi, potenze.

Trasformiamo l'espressione assegnata usando le proprietà delle potenze

$$\left(2^n + 2^{n+1}\right)^2 = (2^n + 2 \times 2^n)^2 = \left((1+2) \times 2^n\right)^2 = (3 \times 2^n)^2 = 9 \times 2^{2n} = 9 \times 4^n$$

Dunque la risposta esatta è la A.

La domanda afferma che per *qualunque* intero n l'espressione $(2^n + 2^{n+1})^2$ è sempre uguale a una (e una sola) delle espressioni riportate nelle risposte, quindi per trovare le risposte sbagliate si può anche scegliere un valore di n a piacimento (magari piccolo, per fare conti semplici) e sostituirlo nelle varie espressioni: ne segue che le risposte che danno un risultato diverso da quello della domanda sono certamente errate. Ad es., per $n = 1$ l'espressione $(2^n + 2^{n+1})^2$ è uguale a $(2 + 2^2)^2 = 36$, mentre la B dà $2^6 = 64$, la C $4^6 = 4096$, la D $2^4 = 16$ e infine la E $9 \times 2 = 18$. Dunque, per esclusione, la A è esatta (controlliamo: $9 \times 4 = 36$). Si tenga presente, tuttavia, che questo tipo di ragionamento permette di individuare con sicurezza solo le risposte sbagliate. Ad esempio, per $n = 0$ l'espressione $(2^n + 2^{n+1})^2$ dà 9, e anche A ed E danno 9 (mentre B, C e D danno risultati diversi), e questo fa concludere solamente che la risposta esatta sarà la A oppure la E; a questo punto, per escludere una delle due, bisogna provare con un altro valore di n.

Proprietà delle potenze.

---

8. La metà di $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ è uguale a

A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$

B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$

C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$

D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$

E. $\left(\frac{1}{4}\right)^{25}$

👁 *Aritmetica; frazioni, potenze.*

✎ La metà di $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ è uguale a

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{50} = \left(\frac{1}{2}\right)^{51}$$

quindi la risposta D è esatta.

☞ Controlliamo rapidamente che le altre risposte affermano qualcosa di diverso. Per B e C è evidente, perché forniscono delle potenze di 1/2 con esponente diverso da 51. La A dà

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{50} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right)^{50} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot 50} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

mentre la E dà

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{25} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right)^{25} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot 25} = \left(\frac{1}{2}\right)^{50}$$

quindi anche queste sono errate.

⚓ *Proprietà delle potenze.*

---

9. Qual è il più piccolo tra i seguenti numeri?

A. 2^{-10}

B. 10^{-2}

C. $\dfrac{1}{2000}$

D. $\dfrac{1}{20}$

E. $\dfrac{2}{1000}$

Aritmetica; frazioni, potenze, confronti numerici.

Il modo in cui sono scritti i numeri suggerisce di riportarli tutti alla forma $1/n$ (con n intero), e poi confrontare i denominatori: a parità di numeratore, la frazione più piccola è quella con il denominatore più grande.

Indicando allora con a, b, c, d, e i numeri proposti dalle risposte A, B, C, D ed E, rispettivamente, si ha

$$a = \frac{1}{2^{10}} \qquad b = \frac{1}{100} \qquad c = \frac{1}{2000} \qquad d = \frac{1}{20} \qquad e = \frac{1}{500}$$

Si vede subito che tra gli ultimi quattro numeri il più piccolo è c (perché 2000 è maggiore di 20, 100 e 500).

Rimane da confrontare a con c, cioè 2^{10} con 2000. Poiché $2^{10} = 1024 < 2000$, il numero c è il più piccolo. Perciò la risposta esatta è la C.

Confronto tra frazioni; proprietà delle potenze.

---

10. Siano

$$x = \sqrt{8 + \sqrt{9}} \qquad ; \qquad y = \sqrt{9 + \sqrt{8}}$$

Allora

A. $-\dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{y}$

B. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = 1$

C. $-x^2 < -y^2$

D. $x + y < \sqrt{10}$

E. $y < x$

Aritmetica; radicali.

I numeri x ed y sono positivi (e diversi tra loro). Quindi la risposta A è equivalente a $y > x$. D'altro canto la risposta E afferma $y < x$, perciò una di queste due risposte è necessariamente vera, e per rispondere è sufficiente capire qual è il maggiore tra i due numeri x ed y. Sono equivalenti le disuguaglianze

$$\begin{array}{rcll} x & < & y & \\ x^2 & < & y^2 & \text{ossia} \quad 8 + \sqrt{9} < 9 + \sqrt{8} \\ 8 + 3 & < & 9 + 2\sqrt{2} & \\ 2 & < & 2\sqrt{2} & \text{che è vera} \end{array}$$

Perciò anche $x < y$ è vera, e la risposta esatta è la A.

Proprietà dei radicali e delle diseguaglianze.

---

11. Il 15 dicembre 2001 un maglione costava 180 000£. Il 15 gennaio 2002 lo stesso maglione veniva venduto al prezzo di 100€. Ricordando che 1€ = 1 936, 27£, si conclude che il prezzo del maglione è

A. aumentato più del 10%

B. aumentato più del 5%, ma meno del 10%

C. aumentato meno del 5%

D. rimasto invariato

E. diminuito almeno del 5%

Aritmetica; percentuali.

Il prezzo in lire è passato da 180 000 a 193 627, quindi è aumentato di 13 627£. Poiché il 10% di 180 000 è 18 000, e quindi il 5% di 180 000 è 9 000, l'aumento è compreso tra il 5% e il 10%. Quindi la risposta esatta è la B.

Notiamo che, dovendo fare il calcolo senza calcolatrice, ed essendo il prezzo di partenza una cifra tonda, non conviene chiedersi "quale percentuale di 180 000 è 13 627?", ma viceversa chiedersi quanto sono il 10% e il 5% di 180 000, e confrontare queste cifre con l'incremento effettivo.

Calcolo di percentuali.

12. Se a e b sono due numeri interi positivi tali che $3a = 2b$, quale delle seguenti deduzioni è corretta?

A. $a + b$ è multiplo di 5

B. $a + b$ è dispari

C. ab è pari ma non è multiplo di 4

D. a oppure b è dispari

E. a e b sono pari

Aritmetica; numeri interi.

L'uguaglianza $3a = 2b$ equivale ad $a/b = 2/3$, il che è possibile se e solo se il numeratore a e il denominatore b sono multipli di 2 e 3, rispettivamente. Se esplicitiamo in una tabella i possibili valori di a e di b, constatiamo subito che le risposte B, C, D ed E sono false.

$a =$	2	4	6	8	$\cdots$
$b =$	3	6	9	12	$\cdots$
	$\Downarrow$	$\Downarrow$		$\Downarrow$	
	E falsa	B e D false		C falsa	

Per esclusione la risposta esatta è la A.

Analogamente a quanto fatto nel quesito n° 4, mostriamo ora che la A è esatta facendo un ragionamento diretto.

L'uguaglianza $3a = 2b$ implica che 3 divide $2b$ e 2 divide $3a$. Ma vale la proprietà

> "Se un numero *primo* p divide ab, allora p divide a oppure divide b"

Quindi

poiché 3 è primo, divide $2b$ e non divide 2, si deduce che 3 divide b;
poiché 2 è primo, divide $3a$ e non divide 3, si deduce che 2 divide a.

Possiamo allora affermare che

$b = 3k$ per qualche intero positivo k, e
$a = 2h$ per qualche intero positivo h

Ma allora il fatto che $3a = 2b$ implica che $3 \times 2h = 2 \times 3k$, da cui $h = k$. In definitiva possiamo dire che, per un certo intero positivo k, si ha

$$b = 3k \qquad \text{e} \qquad a = 2k$$

Cosa se ne può dedurre, con riferimento alle cinque risposte? Sicuramente la A:

$$a + b = 2k + 3k = (2 + 3)\,k = 5k$$

perciò $a + b$ è multiplo di 5.

Scomposizione di un numero intero in fattori primi, numeri primi e divisibilità.

---

13. La somma dei reciproci di due numeri interi positivi è uguale ad uno. Allora la somma dei due numeri è

A. uguale alla loro differenza

B. negativa

C. uguale al loro prodotto

D. nulla

E. uguale ad uno

Aritmetica; numeri interi.

Il *reciproco* di un numero a non nullo è $1/a$. Detti allora n ed m i due numeri interi positivi, sappiamo che

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = 1$$

Un attimo di riflessione mostra che questo è possibile solo se $n = m = 2$. (Infatti se n oppure m vale 1, la somma dei reciproci supera 1; dunque n ed m sono ≥ 2, per cui la somma dei loro reciproci è $\leq 1/2 + 1/2 = 1$, e può valere 1 solo se $n = m = 2$.)

Esaminiamo ora le risposte sapendo che si riferiscono a $n = m = 2$. La somma dei due numeri è 4, e le risposte affermano

A. $4 = 2 - 2 = 0$ falso;

B. $4 < 0$ falso;

C. $4 = 2 \times 2$ vero;

D. $4 = 0$ falso;

E. $4 = 1$ falso.

La risposta esatta è quindi la C.

Numeri interi; disuguaglianze su frazioni.

---

14. Sia

$$x = \sqrt[3]{0,00008}$$

Allora

A. $x = 0,2$

B. $0,04 < x < 0,05$

C. $x = 0,02$

D. $x < 10^{-12}$

E. $0,09 < x < 0,1$

Aritmetica; radicali, confronti numerici.

Per eseguire un calcolo (approssimato) senza usare la calcolatrice, utilizziamo le proprietà di potenze e radici, al modo seguente

$$x = \sqrt[3]{0,00008} = \sqrt[3]{80 \times 10^{-6}} = \sqrt[3]{80} \times 10^{-2}$$

Ora, il numero 80 non è un cubo perfetto, ma si vede subito che $\sqrt[3]{80}$ è compresa fra 4 e 5 perché $4^3 = 64$ e $5^3 = 125$. Pertanto x sarà compreso fra 4×10^{-2} e 5×10^{-2}, che è la risposta B.

La troppa fretta o la disattenzione potrebbe indurre a segnare erroneamente come risposta esatta la C: infatti $(0,02)^3 = 0,000008$ e c'è il rischio di confondere questo numero con $0,00008$.

Proprietà delle potenze ad esponente razionale (uguaglianze e disuguaglianze).

---

15. L'ordinamento corretto fra i numeri 2^{500}, 5^{300} e 10^{100} è

A. $2^{500} < 5^{300} < 10^{100}$

B. $5^{300} < 2^{500} < 10^{100}$

C. $10^{100} < 5^{300} < 2^{500}$

D. $10^{100} < 2^{500} < 5^{300}$

E. $5^{300} < 10^{100} < 2^{500}$

Aritmetica; potenze, confronti numerici.

I tre numeri dati sono enormi, perciò non è possibile stabilirne l'ordinamento calcolandoli esplicitamente. L'idea è riscrivere i tre numeri come potenze con basi diverse ma esponente uguale, e poi confrontare le basi: a parità di esponente, la potenza più grande è quella con base più grande (se le basi sono maggiori di 1). Siccome l'esponente più basso è 100, scegliamo questo come esponente comune: allora, per le proprietà delle potenze,

$$\begin{aligned} 2^{500} &= \left(2^5\right)^{100} = 32^{100}, \\ 5^{300} &= \left(5^3\right)^{100} = 125^{100} \end{aligned}$$

e, poiché $10 < 32 < 125$, si ha anche $10^{100} < 32^{100} < 125^{100}$, ossia $10^{100} < 2^{500} < 5^{300}$. Quindi la risposta esatta è la D.

In linea di principio il confronto dei tre numeri si poteva anche fare trasformandoli in potenze con basi uguali ma esponente differente, e poi confrontando gli esponenti. Se però lo studente ci prova, capirà subito che nel nostro caso i conti sono troppo complicati, e quindi che questa non è certo la strada giusta ...

Proprietà delle potenze.

---

16. Sia

$$a = 20^{11}$$

Allora si ha

A. $10^{12} < a < 10^{13}$

B. $10^{13} < a < 10^{14}$

C. $10^{14} < a < 10^{15}$

D. $10^{15} < a < 10^{16}$

E. $10^{16} < a < 10^{17}$

👁 *Aritmetica; potenze, confronti numerici.*

✎ Per confrontare il numero 20^{11} con opportune potenze di 10, conviene riscriverlo così

$$20^{11} = (2 \times 10)^{11} = 2^{11} \times 10^{11} = 2048 \times 10^{11} = 2,048 \times 10^{3} \times 10^{11} = 2,048 \times 10^{14}$$

Perciò la risposta esatta è la C.

⚓ *Proprietà delle potenze.*
