Capitolo 4

Geometria

58. Se si attraversa un'aiuola rettangolare lungo la diagonale, anziché percorrerne i due lati, quanto percorso si risparmia al massimo?

A. Non più del 10%

B. Circa il 30%

C. Circa il 40%

D. Il 50%

E. Più del 60%

Geometria sintetica piana; rettangoli.

Siano a, b le lunghezze dei lati del rettangolo; la diagonale è lunga $\sqrt{a^2+b^2}$ (per il teorema di Pitagora), mentre se si percorrono i due lati si percorre una lunghezza $a+b$. Un momento di riflessione su qualche figura di rettangolo ci convince che il *massimo risparmio* si ha nel caso in cui il rettangolo è un quadrato (viceversa, se il rettangolo avesse un lato molto più lungo dell'altro, diciamo $a \gg b$, la diagonale sarebbe quasi uguale alla somma dei due lati perché $\sqrt{a^2+b^2} \simeq a \simeq a+b$, ed il vantaggio sarebbe minimo). Nel caso del quadrato, la somma dei due lati vale $2a$, la diagonale vale $a\sqrt{2}$, il risparmio assoluto di percorso è $2a-\sqrt{2}a$, ed il risparmio percentuale è

$$\frac{2a-\sqrt{2}a}{2a} \times 100 \simeq \frac{2-1,4}{2} \times 100 \simeq 30\%$$

Quindi la risposta esatta è la B.

Il punto chiave per rispondere a questa domanda consiste nel *non cercare* di fare il calcolo esatto del risparmio percentuale nel caso generico, ma "indovinare" qual è la configurazione geometrica in cui tale risparmio percentuale è massimo, e poi fare il calcolo del risparmio percentuale solo in questa situazione. A sua volta, per indovinare qual è la situazione migliore, in questo caso la cosa più facile è indovinare qual è la *peggiore* (il rettangolo con un lato zero, che possiamo vedere come caso limite di rettangolo con un lato lunghissimo e uno cortissimo) e poi considerare la situazione più lontana possibile da questa: lati uguali, ossia quadrato. Naturalmente, questo modo di procedere non ha validità generale.

⚓ *Diagonale del quadrato, valore approssimato di $\sqrt{2}$, ragionamenti su problemi sintetici di massimo e minimo, significato di "risparmio percentuale".*

---

59. Un triangolo rettangolo ha perimetro lungo 12 cm. Allora i suoi due cateti sono lunghi

A. 1 e 2 cm

B. 2 e 3 cm

C. 3 e 4 cm

D. 4 e 5 cm

E. 5 e 6 cm

👁 *Geometria sintetica piana; triangoli rettangoli.*

✎ Se a e b sono i cateti, $\sqrt{a^2+b^2}$ è l'ipotenusa (per il teorema di Pitagora) e $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ è il perimetro. Basta allora calcolare il perimetro in funzione dei due cateti per ciascuna delle cinque risposte, e vedere quando si trova 12. Oppure, più semplicemente, ci si ricorda della familiare "terna pitagorica" $3, 4, 5$: poiché $3^2+4^2=5^2$ e $3+4+5=12$, la risposta C è esatta.

⚓ *Teorema di Pitagora, terne pitagoriche.*

---

60. Una sola delle seguenti figure geometriche non è convessa. Quale?

A. Poligonale

B. Cerchio

C. Semipiano

D. Segmento

E. Retta

Geometria sintetica piana; convessità.

Un insieme è *convesso* quando, presi comunque due suoi punti, tutto il segmento che li unisce è contenuto nell'insieme. In base a questa definizione si vede subito che cerchio, semipiano, segmento e retta sono insiemi convessi. Una poligonale, invece, in generale non lo è, salvo il caso banale in cui sia contenuta in una retta. Quindi la risposta esatta è la A.

Definizione di insieme convesso.

61. Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, consideriamo i punti $P(5,0)$, $Q(5,-5)$, $R(0,-5)$, $S(-3,-4)$ e $T(-5,5)$. Quale delle seguenti terne è formata da punti appartenenti alla medesima circonferenza che ha centro nell'origine?

A. P, Q, R

B. Q, R, T

C. P, R, S

D. Q, S, T

E. P, R, T

Geometria analitica piana; circonferenza.

✎ La domanda equivale a:

"Quale delle seguenti terne è formata da punti aventi la stessa distanza dall'origine?"

Perciò basta calcolare la distanza dall'origine ($= \sqrt{x^2+y^2}$, per il teorema di Pitagora) di ciascuno dei punti (x, y); si trova

$$\overline{OP} = 5; \quad \overline{OQ} = 5\sqrt{2}; \quad \overline{OR} = 5; \quad \overline{OS} = 5; \quad \overline{OT} = 5\sqrt{2}$$

perciò la risposta esatta è la C.

⚓ *Definizione di circonferenza come luogo geometrico; formula della distanza tra due punti.*

---

62. Quando è possibile che tre punti A, B, C del piano verifichino la proprietà che la somma delle distanze di A da B e di A da C sia uguale alla distanza di B da C?

A. Mai

B. Sempre

C. Quando i tre punti sono allineati opportunamente

D. Quando A appartiene all'ellisse di cui B e C sono i fuochi

E. Quando i tre punti sono i vertici di un opportuno triangolo isoscele

👁 *Geometria sintetica piana; segmenti.*

✎ Tre punti A, B, C nel piano sono vertici di un triangolo, salvo il caso in cui sono allineati.

Consideriamo prima il caso in cui A, B, C sono vertici di un triangolo (non ridotto a un segmento, cioè i vertici non sono allineati): allora, la somma di due lati qualsiasi è strettamente maggiore del terzo lato ("disuguaglianza triangolare"): dunque $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$. Poiché la domanda richiede invece che sia $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC}$, ne segue che i tre punti *devono* essere allineati.

Se B, A, C sono allineati e A è punto medio di BC, effettivamente $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC}$; dunque la risposta esatta è la C.

Proprietà elementari dei triangoli e delle distanze.

---

63. Si considerino un quadrato Q ed un esagono regolare E inscritti nel medesimo cerchio. Indicati con $A(Q)$ e $A(E)$ le rispettive aree e con $P(Q)$ e $P(E)$ i rispettivi perimetri, si ha

A. $P(E) < P(Q)$

B. $A(E) > A(Q)$

C. $A(E) = A(Q)$

D. $A(E) = \frac{3}{2}A(Q)$

E. $P(E) = P(Q)$

Geometria sintetica piana; cerchio e poligoni inscritti.

Indichiamo con $p\,(n)$ e $A\,(n)$, rispettivamente, il perimetro e l'area del poligono regolare di n lati inscritti in un cerchio fissato. È noto (e comunque evidente: ci si convinca facendo qualche figura) che i perimetri $p\,(n)$ aumentano al crescere di n, approssimando sempre meglio, per difetto, la lunghezza della circonferenza, e analogamente le aree $A\,(n)$ crescono al crescere di n, approssimando sempre meglio, per difetto, l'area del cerchio. Questo, anzi, è uno dei procedimenti che si possono usare, in geometria elementare, per *definire* la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio.

In particolare, allora, si avrà

$$\begin{aligned} P\,(E) &= p\,(6) > p\,(4) = P\,(Q)\,, \\ A\,(E) &= A\,(6) > A\,(4) = A\,(Q) \end{aligned}$$

Dunque la risposta B è sicuramente corretta, mentre A, C, E sono evidentemente false.

Potrebbe restare il dubbio che sia corretta anche la D (non abbiamo calcolato esplicitamente le due aree e non ne conosciamo il rapporto), ma a questo punto la D si esclude per la logica del test: se D fosse corretta ci sarebbero due risposte esatte (D e B), il che sicuramente non accade. In definitiva, la risposta esatta è la B.

(Lo studente curioso calcoli esplicitamente – ad esempio, in funzione del raggio r della circonferenza – i numeri $A(Q)$, $A(E)$, e verifichi che la relazione $A(E) = \frac{3}{2}A(Q)$ è effettivamente falsa).

⚓ *Aree e perimetri dei poligoni inscritti in un cerchio; procedimento di approssimazione con cui si definiscono la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio.*

---

64. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, la distanza del punto di coordinate $(2, 1)$ dalla retta di equazione $x + y + 1 = 0$ è

A. 4

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

E. 1

Geometria analitica piana; distanza tra un punto e una retta.

È sufficiente applicare la formula per la distanza di un punto da una retta: se la retta r ha equazione

$$ax + by + c = 0$$

la distanza del punto (x_0, y_0) da r è data da

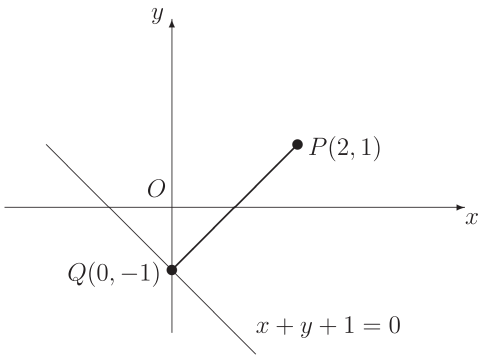
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

In questo caso

$$d = \frac{|2 + 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Quindi la risposta esatta è la D.

Se capitasse di non ricordare la formula della distanza, il quesito si può comunque risolvere così: una volta rappresentati nel piano cartesiano la retta $x + y + 1 = 0$ (ovvero $y = -x - 1$) e il punto $P\,(2, 1)$, si tracci la retta che è perpendicolare alla retta data e passa per P.



Come si vede, le due rette si intersecano in $Q\,(-1, 0)$ (non occorrono calcoli, basta fare il disegno su un foglio quadrettato: la retta $x + y + 1 = 0$ è parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante, per cui la sua perpendicolare per P è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante e perciò passa per Q). Allora la distanza $\overline{PQ}$ è la diagonale di un quadrato di lato 2, cioè vale $2\sqrt{2}$.

Formula per la distanza di un punto da una retta.

---

65. Due circonferenze concentriche hanno diametri rispettivamente uguali a 6 cm e a 2 cm. Qual è l'area della parte di piano compresa tra esse?

A. 4π cm^2

B. 8π cm^2

C. 10π cm^2

D. 16π cm^2

E. 32π cm^2

Geometria sintetica piana; corona circolare.

La "parte di piano compresa tra due circonferenze concentriche" si chiama *corona circolare*, ed ha per area la differenza tra le aree dei due cerchi. Ricordando che l'area di un cerchio di raggio r vale πr^2, poiché le due circonferenze, nel nostro caso, hanno raggi pari a $R = 3$ cm e $r = 1$ cm, l'area della corona circolare sarà uguale a

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi\,(9-1) = 8\pi \text{ cm}^2$$

La risposta esatta quindi è la B.

Formula per il calcolo dell'area del cerchio (e quindi della corona circolare).

---

66. Nel piano il luogo dei punti equidistanti da due rette distinte assegnate è formato da

A. una o due rette, a seconda della posizione reciproca delle rette date

B. una retta

C. due rette perpendicolari

D. una circonferenza

E. un punto

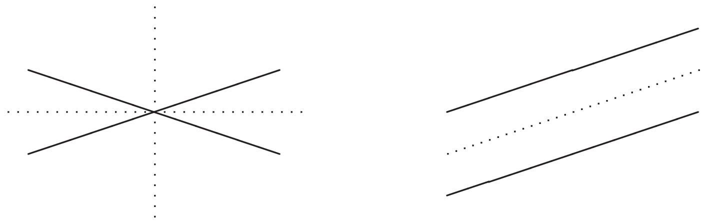
Geometria sintetica piana; rette.

Due rette distinte nel piano generalmente si incontrano in un punto, salvo il caso particolare in cui sono parallele.

Cominciamo a ragionare sul caso delle rette incidenti, e immaginiamo qual è il luogo dei punti equidistanti: sarà la retta bisettrice dell'angolo formato tra le due. Ma in realtà le due rette hanno due bisettrici diverse, a seconda di quale angolo si prenda in considerazione, ed una figura mostra che queste due bisettrici sono tra loro perpendicolari.

Ora chiediamoci se lo stesso vale nel caso delle rette parallele: la retta parallela alle due che giace tra le due ad uguale distanza da entrambe consiste di punti equidistanti alle due rette, mentre in questo caso una retta perpendicolare a questa non soddisfa la stessa proprietà.

La risposta esatta quindi è la A.



Concetto di luogo geometrico; proprietà delle rette nel piano.

67. Siano S l'area di un quadrato ed s l'area del triangolo equilatero costruito sulla sua diagonale. Allora il rapporto $\frac{S}{s}$ vale

A. $3\sqrt{2}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

E. $\sqrt{3}$

Geometria sintetica piana; poligoni.

✎ Se a è il lato del quadrato, è $S = a^2$ e la sua diagonale vale $a\sqrt{2}$ (per il teorema di Pitagora). Il triangolo equilatero di lato $a\sqrt{2}$ ha altezza $h = (a\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, dunque l'area del triangolo rettangolo è

$$s = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)\left(a\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

Perciò

$$\frac{S}{s} = \frac{a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

e la risposta esatta è la D.

⚓ *Area del quadrato e del triangolo; relazioni lato-diagonale nel quadrato e lato-altezza nel triangolo equilatero.*

---

68. Il rapporto fra le superfici totali del cubo inscritto e di quello circoscritto ad una stessa sfera è

A. $\sqrt{3}/9$

B. $\sqrt{3}/3$

C. $1/3$

D. $1/\sqrt{3}$

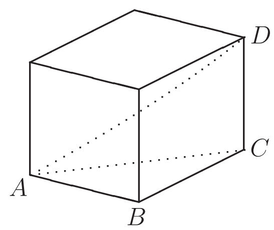
E. $2/3$

👁 *Geometria sintetica dello spazio; sfera e poliedri inscritti e circoscritti.*

✎ Sia r il raggio della sfera. La lunghezza dello spigolo del cubo circoscritto sarà pari al diametro della sfera, $2r$; ogni faccia del cubo quindi ha area $(2r)^2 = 4r^2$; perciò la superficie totale del cubo circoscritto è $S = 6 \times 4r^2 = 24r^2$.
Consideriamo ora il cubo inscritto. In questo caso è la diagonale d del cubo (ossia il

segmento che congiunge due vertici opposti) ad essere uguale al diametro $2r$ della sfera. Detto L lo spigolo del cubo, la sua diagonale misura $d = L\sqrt{3}$, come si vede facendo una figura e calcolando d a partire da L applicando due volte il teorema di Pitagora

$$d = \overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{L^2 + L^2 + L^2} = L\sqrt{3}$$



Quindi lo spigolo del cubo inscritto misura $L = d/\sqrt{3} = 2r/\sqrt{3}$, l'area di una faccia è $\left(2r/\sqrt{3}\right)^2 = 4r^2/3$, e l'area della superficie totale del cubo inscritto è $s = 6 \times 4r^2/3 = 8r^2$. Possiamo ora calcolare il rapporto richiesto

$$\frac{s}{S} = \frac{8r^2}{24r^2} = \frac{1}{3}$$

Perciò la risposta esatta è la C.

Capacità di disegnare (o immaginare) il cubo inscritto e circoscritto a una sfera, per vedere le relazioni tra i rispettivi elementi; calcolo della lunghezza di un segmento nello spazio mediante il teorema di Pitagora in 3 dimensioni; area del quadrato, superficie totale del cubo.

---

69. Si considerino le due sfere S_1 e S_2, la prima inscritta e la seconda circoscritta al medesimo cubo. Allora tra i volumi V_1 e V_2 delle due sfere sussiste la seguente relazione

A. $V_1 = \frac{\sqrt{3}}{9} V_2$

B. $V_2 = \sqrt{2} V_1$

C. $V_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} V_2$

D. $V_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} V_2$

E. $V_1 > V_2$

Geometria sintetica dello spazio; cubo e sfera inscritta e circoscritta.

Le prime quattro risposte esprimono un rapporto tra i due volumi, l'ultima dice un'evidente falsità (il volume della sfera inscritta è minore del volume del cubo, che è minore del volume della sfera circoscritta, quindi $V_1 < V_2$, e non viceversa). Dobbiamo perciò calcolare il rapporto tra V_1 e V_2.

Sia L lo spigolo del cubo, e siano R_1 e R_2, rispettivamente, i raggi di S_1 e S_2. Esprimiamo in funzione di L i volumi delle due sfere, poi calcoleremo il rapporto V_1/V_2.

Poiché S_1 è inscritta nel cubo, il suo diametro è uguale ad L, dunque $2R_1 = L$, $R_1 = L/2$ e

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6} L^3$$

Poiché S_2 è circoscritta al cubo, il suo diametro $2R_2$ è uguale alla diagonale del cubo (ossia il segmento che unisce due vertici opposti), che vale $L\sqrt{3}$ (v. quesito n° 68). Quindi $R_2 = L\sqrt{3}/2$ e

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{4}{3}\pi \left(L\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi L^3$$

Perciò

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\pi}{6}L^3}{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi L^3} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

e la risposta esatta è la A.

Formula per il volume della sfera, teorema di Pitagora in 3 dimensioni e considerazioni elementari sulla sfera inscritta e circoscritta a un cubo.

---

70. Nel piano cartesiano ortogonale Oxy si considerino le rette $r : 2x + 3y + k = 0$ ed $s : 6x + ky + 9 = 0$, con k parametro reale.Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A. Per una opportuna scelta di k le rette r ed s sono parallele e distinte

B. Per una opportuna scelta di k le rette r ed s si intersecano nell'origine degli assi

C. Per nessuna scelta di k le rette r ed s sono perpendicolari

D. Soltanto per un numero finito di scelte di k le rette r ed s sono incidenti

E. Per una opportuna scelta di k le rette r ed s sono coincidenti

Geometria analitica piana; rette.

Consideriamo la risposta A. Le due rette sono parallele se i due coefficienti della x e della y di r (2 e 3) risultano proporzionali ai rispettivi coefficienti di s (6 e k). Questo accade se e solo se $k = 9$: per questo valore di k le rette sono parallele e hanno equazioni (semplificando la seconda equazione per 3):

$$2x + 3y + 9 = 0 \qquad \text{e} \qquad 2x + 3y + 3 = 0$$

per cui sono anche distinte. Perciò la risposta A è esatta.

Esaminiamo anche le altre possibili risposte (lo studente avrebbe potuto esaminare le risposte in un ordine diverso, e non avrebbe incontrato subito la risposta esatta).

La B è falsa: per intersecarsi nell'origine le due rette devono anzitutto passare per l'origine, e la s chiaramente non ci passa.

Per quanto riguarda la C, va ricordato che le due rette sono perpendicolari se i prodotti dei due coefficienti della x ($2 \times 6 = 12$) e dei due coefficienti della y ($3 \times k$) sono opposti. Si ha $12 = -3k$ per $k = -4$, e anche la C è falsa.

Per la D, si osservi che per due rette essere "incidenti" significa non essere né "parallele e distinte" né "coincidenti", sicché si può stabilire immediatamente se D è vera o falsa dopo aver esaminato le risposte A ed E e senza dover perdere tempo a fare conti.

La E è falsa per quanto già detto a proposito della A: per coincidere due rette devono anzitutto essere parallele, ma abbiamo visto che nell'unico caso in cui sono parallele ($k = 9$) le rette sono distinte: quindi non coincidono mai.

Infine anche la risposta D è falsa: infatti, se per $k = 9$ le rette sono parallele e distinte, allora per ogni $k \neq 9$ saranno incidenti o coincidenti, e non essendo mai coincidenti si conclude che per un numero *infinito* di valori di k le due rette sono incidenti.

⚓ *Equazione della retta; intersezione tra due rette; condizioni di parallelismo e di perpendicolarità tra due rette.*

---

71. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, sia r la retta di equazione

$$y = \frac{3x + 1}{-2}$$

Quale delle seguenti equazioni rappresenta una retta parallela ad r e passante per il punto $(1, 1)$?

A. $y = \dfrac{5 - 3x}{2}$

B. $y = \dfrac{3}{2}(x - 1) + 1$

C. $y = 1 + \dfrac{2}{3}(x - 1)$

D. $y = -\dfrac{3}{2}x + 1$

E. $y = \dfrac{2}{3}x + 1$

👁 *Geometria analitica piana; rette.*

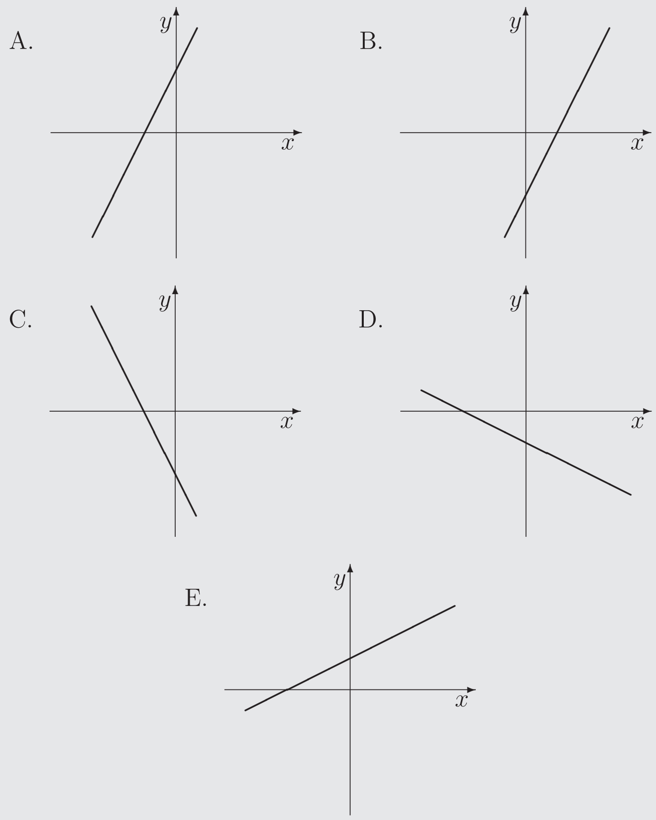
✎ Delle 5 rette proposte, solo la A e la D hanno pendenza uguale a quella della retta data (cioè $-3/2$), quindi B, C ed E sono false.

Per decidere quale tra A e D è la risposta vera, basta controllare il passaggio per $(1, 1)$: sostituendo $x = 1$ in ciascuna equazione, si trova $y = 1$ nel caso A e $y \neq 1$ nel caso D, quindi D è falsa e la risposta esatta è la A.

Equazione della retta determinata assegnando direzione e passaggio per un punto.

---

72. Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, quale tra le seguenti è la retta di equazione $4x - 2y + 1 = 0$?



Geometria analitica piana; rette.

Riscriviamo l'equazione nella forma $y = mx + q$, ossia $y = 2x + 1/2$. La retta ha pendenza

2 (crescente, più ripida di 45°), e taglia l'asse y nel punto $(0, 1/2)$. Dunque la risposta esatta è A.

☞ Le rette disegnate in C e D sono decrescenti, cioè hanno coefficiente angolare $m < 0$; quella in E ha coefficiente angolare positivo ma minore di 1 (è meno ripida di 45°); quella in B taglia l'asse y in un punto di ordinata negativa, cioè ha $q < 0$.

⚓ *Significato geometrico dei parametri m e q nell'equazione della retta $y = mx + q$.*

---

73. Una parabola e una circonferenza possono avere in comune al massimo

A. un arco

B. quattro punti

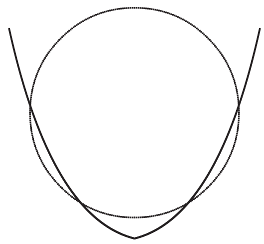
C. due punti

D. un punto

E. cinque punti se il fuoco della parabola coincide con il centro della circonferenza

👁 *Geometria analitica; coniche.*

✎ Dalla geometria analitica è noto che una conica è completamente individuata da 5 punti, il che significa che se due coniche hanno 5 punti in comune, coincidono. D'altro canto una parabola e una circonferenza non possono coincidere, quindi le risposte A (che implica infiniti punti in comune) ed E sono sbagliate. In generale, due coniche distinte possono avere in comune fino a quattro punti. Si tratta di capire se nel caso particolare di una circonferenza e di una parabola può accadere che le intersezioni siano effettivamente quattro. Anche senza ricordare particolari teoremi che affermino che questo è possibile, una semplice figura mostra che ciò può capitare.



Dunque la risposta esatta è la B.

(Si noti che la risposta B afferma che le intersezioni sono al massimo quattro, senza escludere quindi che talvolta siano di meno).

Equazione di una conica, condizioni che la determinano, intersezione tra due coniche.

---

74. Nel piano cartesiano ortogonale Oxy il luogo dei punti di coordinate (x, y) che verificano la condizione

$$x^2 - 1 = 0$$

A. è formato da un unico punto

B. è formato dai punti di una parabola

C. è formato da infiniti punti

D. è formato da due soli punti

E. è indeterminato perché la condizione data non consente di determinare l'ordinata dei punti del luogo

Geometria analitica piana; riconoscimento di luoghi descritti da equazioni.

✎ L'equazione $x^2 - 1 = 0$ ha per soluzioni $x = 1$ e $x = -1$, che rappresentano due rette verticali. Il luogo geometrico consiste quindi di infiniti punti, e la risposta esatta è la C.

☞ Commentiamo brevemente le risposte errate D ed E.

La D può indurre in errore se si dimentica che si sta lavorando nel piano (x, y): certamente, vista come equazione algebrica in x, l'equazione $x^2 - 1 = 0$ ha due soluzioni $x = \pm 1$; tuttavia, nel piano ognuna di queste *non* rappresenta un punto (o un numero) ma una retta.

Analogamente, la E contiene un errore insidioso. Un'equazione algebrica (o un sistema di equazioni) si dice "indeterminata" se ammette infinite soluzioni; qui stiamo però affrontando il *problema geometrico* di individuare il *luogo dei punti* che soddisfano una certa equazione, e questo luogo consiste di due rette. L'insieme dei punti di due rette è un insieme di infiniti punti, e pertanto è ovvio che l'ordinata del generico punto di tale insieme sia variabile; ciò non significa affatto che il luogo stesso sia indeterminato!

⚓ *Nozione di luogo geometrico individuato da un'equazione; equazione della retta.*

---

75. Dato un triangolo equilatero siano S l'area del cerchio circoscritto ed s l'area del cerchio inscritto. Allora

A. $S = 2s$

B. $S = 4s$

C. $3S = 4s$

D. il rapporto S/s dipende dalla lunghezza del lato del triangolo

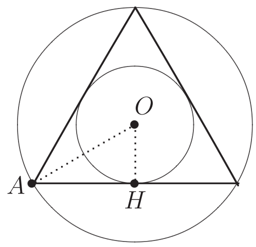
E. le superfici dei due cerchi sono grandezze fra loro incommensurabili

👁 *Geometria sintetica piana; triangolo equilatero e cerchio inscritto e circoscritto.*

Tutte le risposte riguardano il valore del rapporto S/s; in particolare la E significa che tale rapporto è un numero irrazionale. Detti R il raggio del cerchio circoscritto e r il raggio del cerchio inscritto, si ha

$$\frac{S}{s} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

Per calcolare R/r conviene fare un disegno, tenendo presente che per il triangolo equilatero i cerchi inscritto e circoscritto sono concentrici. Chiamiamo O il loro centro comune.



Ricordiamo inoltre che nel caso del triangolo equilatero O è anche punto di incontro delle altezze, delle bisettrici e delle mediane. Ne segue che il triangolo di vertici A, H, O (dove $\overline{AO} = R$, $\overline{OH} = r$) è un triangolo con angoli di 30°, 60°, 90°, ossia è la metà di un triangolo equilatero, per cui $R = 2r$. In conclusione $R/r = 2$ e perciò la risposta esatta è la B.

Area del cerchio; concetto di cerchio inscritto e circoscritto ad un triangolo; punti notevoli del triangolo; proprietà dei triangoli di 30°*,* 60°*,* 90°*.*

---

76. Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, consideriamo le circonferenze c di centro $O = (0, 0)$ e raggio 2 e c' di centro O' e raggio 3. Le circonferenze c e c' si intersecano in due punti. Tra i seguenti punti, quale può essere O'?

A. $(3, 4)$

B. $(5, -2)$

C. $\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$

D. $\left(1, \frac{9}{2}\right)$

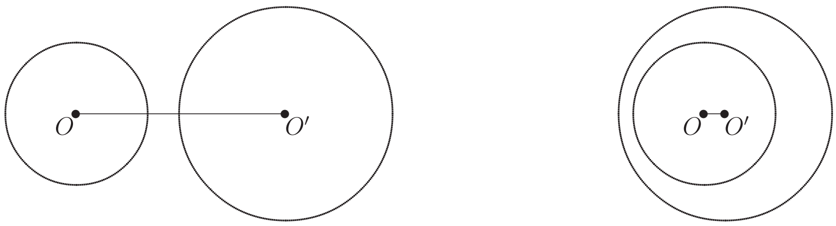
E. $(-4, -4)$

Geometria analitica piana; circonferenza.

La geometria elementare insegna che

> "Due circonferenze si intersecano in due punti quando la distanza tra i due centri è minore della somma dei due raggi e maggiore della differenza tra i due raggi"

In questo caso i raggi valgono 2 e 3, quindi la distanza $d = \overline{OO'}$ tra i centri deve soddisfare $1 < d < 5$. Allo stesso risultato si perviene naturalmente anche se non si ricorda la proprietà prima enunciata, ma si riflette sulla posizione reciproca che devono avere le due circonferenze per *non* intersecarsi in due punti (magari aiutandosi con un disegno): esse devono essere esterne (e allora è $d \geq 5$) oppure l'una interna all'altra (per cui è $d \leq 1$).



Poiché uno dei due centri è l'origine, si tratta di individuare tra i cinque punti (x, y) proposti quello per cui la distanza $\sqrt{x^2 + y^2}$ dall'origine è compresa tra 1 e 5. Anzi, per non calcolare radici quadrate, cerchiamo per quale di questi punti vale la condizione

$$1 < x^2 + y^2 < 25$$

A: $x^2 + y^2 = 25$

B: $x^2 + y^2 = 29$

C: $x^2 + y^2 = 242/9 \simeq 26,9$

D: $x^2 + y^2 = 85/4 = 21,25$

E: $x^2 + y^2 = 32$

L'unico punto che soddisfa le condizioni chieste è il D. La risposta esatta quindi è la D.

Posizioni relative di due circonferenze; distanza tra due punti.

---

77. Un cocomero perfettamente sferico viene tagliato in 16 fette uguali. Se il diametro del cocomero è di 20 cm, il volume di ciascuna fetta è di

A. $\frac{1000}{12}\pi$ cm^3

B. $\frac{20^3}{16}\pi$ cm^3

C. $\frac{\pi}{128}$ cm^3

D. $\frac{\pi^3}{128}$ cm^3

E. $\frac{5}{16}\pi$ cm^3

Geometria sintetica dello spazio; sfera.

Il volume della sfera di raggio R è $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. In questo caso il diametro è 20 cm, quindi $R = 10$ cm, e $V = \frac{4}{3}\pi 10^3$ cm^3. Il volume di ua singola fetta sarà 1/16 di questo, cioè

$$\frac{1}{16} \times \frac{4}{3}\pi 10^3 = \frac{1000}{12}\pi \text{ cm}^3$$

La risposta esatta è quindi la A.

⚓ *Formula per il volume della sfera.*

---

78. In una circonferenza di raggio unitario è inscritto un triangolo avente un lato uguale al diametro. Si dica quali fra le seguenti sono le lunghezze a e b degli altri due lati del triangolo.

A. $a = 1$, $b = 1$

B. $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{2}{5}$

C. $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{3}{4}$

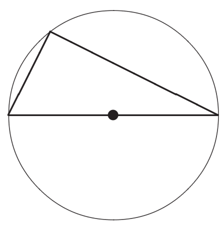
D. $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $b = \frac{2}{\sqrt{5}}$

E. $a = \frac{6}{5}$, $b = \frac{8}{5}$

👁 *Geometria sintetica piana; triangolo e cerchio circoscritto.*

✎ Ricordiamo il teorema che dice

> "Un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo, con l'ipotenusa uguale al diametro della circonferenza"



Dire (come nel testo del quesito) che il triangolo, inscritto in una circonferenza, ha un lato uguale al diametro, significa proprio questo, perciò il nostro triangolo è rettangolo, e l'ipotenusa è uguale al diametro, quindi ha lunghezza 2 (perché il raggio ha lunghezza 1). Per il teorema di Pitagora, la somma dei quadrati dei due cateti a e b deve allora valere 4 (cioè il quadrato dell'ipotenusa). Si tratta dunque di controllare, in ciascuna risposta, se vale l'uguaglianza $a^2 + b^2 = 4$ oppure no. Si ha

A. $1^2 + 1^2 = 2$ No

B. $\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ No

C. $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{45}{16}$ No

D. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$ No

E. $\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{100}{25} = 4$ Sì

Quindi la risposta esatta è la E.

☜ Se non si ricordasse il teorema di geometria sopra citato (peraltro famoso!), un attimo di osservazione su varie figure di triangoli inscritti in una semicirconferenza dovrebbe almeno *suggerire* la validità del teorema stesso, e quindi mettere sulla strada giusta.

(Nella geometria elementare, se non si ricordano i teoremi bisogna almeno fare uso di *molta osservazione*.)

☜ Un'altra idea che può venire in mente è di risolvere il quesito sfruttando il fatto che

> "In un triangolo un lato è sempre minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza"

Nel nostro caso i lati sono lunghi 2, a, b, per cui dev'essere

$$|a - b| < 2 < a + b$$

Ora, si ha

A. $a + b = 2 \not> 2$ quindi A è falsa

B. $a + b = \frac{3}{5} \not> 2$ quindi B è falsa

C. $|a - b| = \frac{3}{4} < 2$ e $a + b = \frac{9}{4} > 2$ quindi C *può* essere vera

D. $a + b = \frac{3}{\sqrt{5}} \not> 2$ quindi D è falsa

E. $|a - b| = \frac{2}{5} < 2$ e $a + b = \frac{14}{5} > 2$ quindi E *può* essere vera

A questo punto però , per decidere quale fra C ed E è la risposta esatta, bisogna sfruttare l'informazione che il triangolo è inscritto in una semicirconferenza, quindi è rettangolo, ecc.

⚓ *Triangolo rettangolo inscritto in una semicirconferenza; teorema di Pitagora.*

---

79. Un trapezio isoscele è inscritto in una semicirconferenza di raggio 5 cm. Calcolare l'area del trapezio sapendo che la sua altezza è uguale a 3 cm.

A. 27 cm^2

B. 20 cm^2

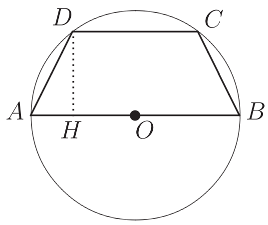
C. 40 cm^2

D. $\dfrac{45}{2}$ cm^2

E. $\dfrac{27}{2}$ cm^2

👁 *Geometria sintetica piana; trapezio inscritto in una circonferenza.*

✎ Facciamo una figura che illustri la situazione descritta



L'area del trapezio isoscele è data da

$$\text{Area} = \frac{\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right) \times \overline{DH}}{2}$$

Sappiamo che $\overline{AB} = 10$, $\overline{DH} = 3$, $\overline{DO} = 5$, quindi per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo DOH, si ha $\overline{OH} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Allora $\overline{CD} = 2 \times \overline{OH} = 8$, e

$$\text{Area} = \frac{(10+8) \times 3}{2} = 27 \text{ cm}^2$$

Perciò la risposta esatta è la A.

Area del trapezio; teorema di Pitagora.

---

80. Si consideri una corona circolare di raggio esterno R e raggio interno $r = R/3$ e sia S la sua area. Se il raggio esterno rimane invariato e il raggio interno raddoppia, l'area della corrispondente corona circolare è uguale a

A. $\frac{1}{2}S$

B. $\frac{1}{4}S$

C. $\frac{3}{4}S$

D. $\frac{3}{8}S$

E. $\frac{5}{8}S$

Geometria sintetica piana; corona circolare.

Esprimiamo l'area della corona circolare di partenza in funzione di R, calcolandola come differenza tra l'area del cerchio esterno ed interno

$$S = \pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}\pi R^2$$

Se ora il raggio interno raddoppia, diventando quindi $\frac{2}{3}R$, la nuova area sarà

$$S' = \pi \left[R^2 - \left(\frac{2R}{3}\right)^2\right] = \frac{5}{9}\pi R^2 = \frac{5}{8} \times \frac{8}{9}\pi R^2 = \frac{5}{8}S$$

Pertanto la risposta esatta è la E.

⚓ *Area del cerchio e della corona circolare.*

---

81. Un cono circolare retto ha raggio di base r e altezza h. Se si raddoppia il raggio di base e si dimezza l'altezza, il volume del cono

A. si raddoppia

B. si quadruplica

C. aumenta di πr^2

D. si dimezza

E. non cambia

👁 *Geometria sintetica dello spazio; cono.*

✎ Il volume del cono è proporzionale all'area del cerchio di base (che a sua volta è proporzionale a r^2) e all'altezza h

$$V \div hr^2$$

Se si raddoppia il raggio, il volume aumenta di un fattore $2^2 = 4$; se si dimezza l'altezza, il volume diventa la metà. Complessivamente il volume varia di un coefficiente $4/2 = 2$, cioè si raddoppia. La risposta esatta quindi è la A.

☞ La formula per il volume del cono di raggio r e altezza h è

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ma, come si vede dallo svolgimento proposto, per rispondere al quesito non è necessario ricordare che il valore esatto del fattore di proporzionalità è $\pi/3$.

⚓ *Formula del volume del cono; ragionamenti elementari di proporzionalità.*

---

82. Dal punto A Aldo vede il vertice V di un palo verticale HV sotto un angolo di 15°. Se Aldo si avvicina di 10 m al palo, spostandosi nel punto B, l'angolo diventa di 30°. Qual è l'altezza del palo?

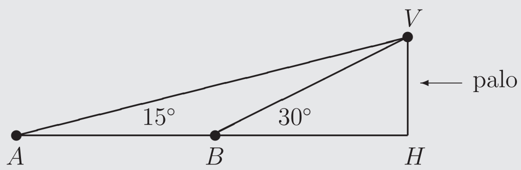
A. $5\sqrt{3}$ m

B. 5 m

C. $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ m

D. 10 m

E. $10\sqrt{3}$ m



Geometria sintetica piana; triangoli.

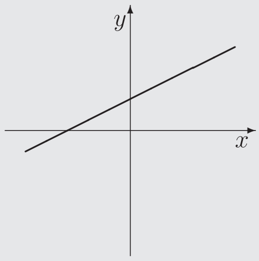
Il triangolo BHV è retto in H, ha l'angolo in B di 30°, quindi l'angolo in V è di 60°. Il triangolo AHV è retto in H, ha l'angolo in A di 15°, quindi l'angolo in V è di 75°. Ma allora l'angolo $\widehat{AVB}$ misura $75° - 60° = 15°$, e questo ci dice che il triangolo ABV è isoscele, quindi $\overline{AB} = \overline{BV}$, e in particolare $\overline{BV} = 10$. D'altro canto, poiché il triangolo BHV ha angoli di $30°, 60°, 90°$, risulta $\overline{VH} = \frac{1}{2}\overline{BV} = 5$. Perciò la risposta esatta è la B.

Somma degli angoli interni di un triangolo; triangoli di $30°, 60°, 90°$.

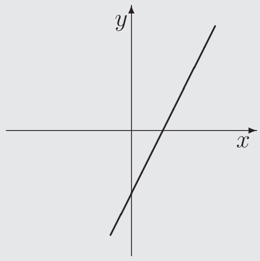
---

83. Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, quale tra le seguenti è la retta di equazione $x + 2y + 3 = 0$?

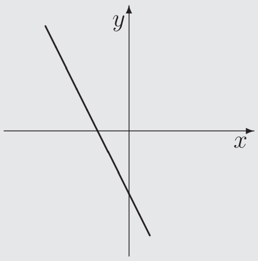
A.



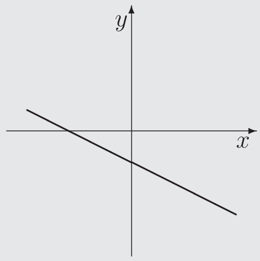
B.



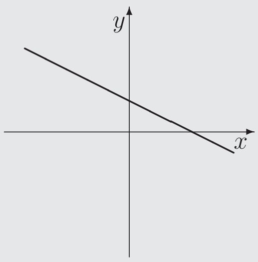
C.



D.



E.



Geometria analitica piana; rette.

Riscriviamo l'equazione nella forma $y = mx + q$, cioè $y = -x/2 - 3/2$. Si tratta di una retta decrescente (cioè $m < 0$: quindi scartiamo A e B), meno inclinata rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante (quindi scartiamo C), e che taglia l'asse y in un punto di ordinata negativa (cioè $q < 0$: quindi scartiamo anche E). Dunque la risposta esatta è la D.

Significato geometrico dei parametri m e q nell'equazione della retta $y = mx + q$.

---

84. Una sfera di raggio di 2 cm e un cilindro circolare retto con raggio di base di 2 cm hanno lo stesso volume. Allora l'altezza del cilindro è uguale a

A. 4 cm

B. $\frac{4}{3}$ cm

C. $\frac{8}{3}$ cm

D. $\frac{2}{3}$ cm

E. 6 cm

Geometria sintetica dello spazio; sfera e cilindro.

La sfera di raggio 2 ha volume $V = \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{32}{3}\pi$. Il cilindro circolare retto di raggio 2 e altezza h ha volume $V = \pi 2^2 h = 4\pi h$. Imponendo l'uguaglianza dei due volumi si trova

$$\frac{32}{3}\pi = 4\pi h \qquad \text{ossia} \qquad h = \frac{8}{3}$$

e la risposta esatta è la C.

Formule per i volumi della sfera e del cilindro.

---

85. Un triangolo rettangolo, avente cateti di lunghezza rispettiva 1 cm e 2 cm, viene fatto ruotare di un giro completo una volta intorno al cateto minore, generando un cono $\mathcal{C}_1$, e una volta intorno al cateto maggiore, generando un cono $\mathcal{C}_2$. Allora il volume di $\mathcal{C}_1$ è

A. uguale al volume di $\mathcal{C}_2$

B. un quarto del volume di $\mathcal{C}_2$

C. il doppio del volume di $\mathcal{C}_2$

D. il quadruplo del volume di $\mathcal{C}_2$

E. la metà del volume di $\mathcal{C}_2$

👁 *Geometria sintetica dello spazio; cono.*

✎ Il volume di un cono di raggio r e altezza h è

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Il cateto intorno a cui ruota il triangolo rettangolo è l'altezza del cono generato, l'altro cateto ne è il raggio di base. Quindi il cono $\mathcal{C}_1$ ha $r = 2$, $h = 1$, il cono $\mathcal{C}_2$ ha $r = 1$, $h = 2$. Di conseguenza,

$$\frac{\text{Volume di } \mathcal{C}_1}{\text{Volume di } \mathcal{C}_2} = \frac{2^2 \times 1}{1^2 \times 2} = 2$$

Il volume di $\mathcal{C}_1$ è il doppio del volume di $\mathcal{C}_2$, e la risposta esatta è la C.

⚓ *Formula per il volume del cono; capacità di disegnare (o immaginare) il cono ottenuto per rotazione di un triangolo rettangolo attorno a un cateto.*

---

86. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la retta r di equazione

$$y = \frac{2x+1}{-3}$$

La retta passante per il punto di coordinate $(1,1)$ e perpendicolare ad r ha equazione

A. $y = \dfrac{2x+1}{3}$

B. $y = \dfrac{3x-1}{2}$

C. $y = \dfrac{3x+1}{2}$

D. $y = \dfrac{2x-5}{3}$

E. $y = \dfrac{2x-5}{-3}$

Geometria analitica piana; rette.

La retta r ha coefficiente angolare $m = -2/3$, quindi la retta cercata (perpendicolare a questa) ha coefficiente angolare

$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{3}{2}$$

Tra le rette proposte, solo la B e la C hanno questo coefficiente angolare. Controlliamo quale delle due passa per $(1,1)$. Sostituendo le coordinate $(1,1)$ nell'equazione B si trova

$$1 = \frac{3-1}{2}, \qquad \text{vero}$$

mentre sostituendo nell'equazione C si trova

$$1 = \frac{3+1}{2}, \qquad \text{falso}$$

Perciò la risposta esatta è la B.

Equazione della retta; condizione di perpendicolarità tra due rette.

---

87. Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, siano c e c' le due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 = 9$ e $(x-1)^2 + y^2 = 1$, rispettivamente. Quante sono le rette tangenti comuni a c e c'?

A. Nessuna

B. Una

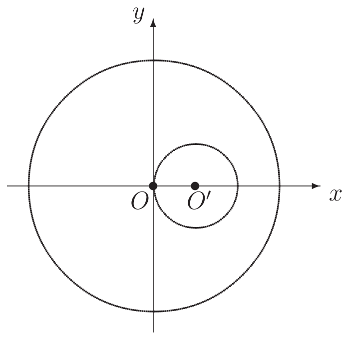
C. Due

D. Più di due, ma in numero finito

E. Infinite

Geometria analitica piana; circonferenza.

La circonferenza c ha centro $O = (0,0)$ e raggio 3; la circonferenza c' ha centro $O' = (1,0)$ e raggio 1. Perciò c' è interna a c, e le due circonferenze non hanno alcuna tangente in comune. La risposta esatta è quindi la A.



In questo esercizio è sufficiente saper leggere dall'equazione della circonferenza quali siano il centro e il raggio, dopodiché il problema si risolve facilmente con un ragionamento di geometria sintetica (ad esempio, disegnando le circonferenze e osservando la figura). Sarebbe una grande perdita di tempo affrontare il problema analiticamente, cercando di scrivere equazioni di rette tangenti. Il commento ovvio è che, in un problema geometrico, è sempre utile visualizzare tutto ciò che è possibile (o semplice) visualizzare.

Equazione della circonferenza e riconoscimento di centro e raggio; considerazioni elementari sulle tangenti a una circonferenza.

88. Nello spazio sono assegnati quattro punti A, B, C e D non complanari. Allora

A. esistono infinite superfici sferiche passanti per A, B, C e D

B. esiste una ed una sola superficie sferica passante per A, B, C e D

C. non esiste alcuna superficie sferica passante per A, B, C e D

D. l'esistenza di una superficie sferica passante per A, B, C e D dipende dalla posizione reciproca dei punti

E. esistono quattro superfici sferiche passanti per A, B, C e D

Geometria sintetica dello spazio; superficie sferica e condizioni che la determinano.

Se A, B, C, D sono punti non complanari, i primi 3 punti A, B, C sono non allineati e quindi determinano un piano π e, in quel piano, un'unica circonferenza c passante per A, B, C. La sfera passante per A, B, C, D, se esiste, taglierà il piano π lungo la circonferenza c, e avrà il centro sulla retta r perpendicolare a π e passante per il centro della circonferenza. Abbiamo quindi una famiglia di infinite sfere passanti per A, B, C, dipendente da un unico parametro (rappresentato ad esempio dalla posizione del centro della sfera lungo la retta r). È naturale quindi che la sfera possa essere univocamente determinata imponendo un'ulteriore condizione, ossia il passaggio per il punto D, non complanare ad A, B, C. Questo ragionamento geometrico (per quanto non completamente rigoroso) convince che la risposta esatta è la B.

Considerazioni elementari su sfera, circonferenza, piano; condizioni che determinano una circonferenza.

---

89. Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, il luogo dei punti le cui coordinate (x, y) soddisfano l'equazione

$$x\,(2x + y - 1) = 0$$

è

A. una circonferenza

B. una retta

C. una parabola

D. una coppia di rette

E. una retta o un punto

Geometria analitica piana; riconoscimento di luoghi descritti da equazioni.

L'equazione assegnata è soddisfatta se

$$x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad 2x + y - 1 = 0$$

Poiché ognuna delle due equazioni rappresenta una retta, l'equazione di partenza rappresenta una coppia di rette. Perciò la risposta esatta è la D.

Più che su concetti di geometria analitica, questo quesito si basa su un fatto algebrico elementare: il prodotto di due espressioni si annulla se e solo se si annulla almeno uno dei due fattori ("legge di annullamento di un prodotto"). Capito questo, è immediato identificare il luogo come una coppia di rette.

Equazione di una retta; legge di annullamento di un prodotto.

---

90. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, l'insieme delle soluzioni (x, y) del sistema

$$\begin{cases} xy > 1 \\ x = y \end{cases}$$

è formato da

A. due soli punti

B. un segmento

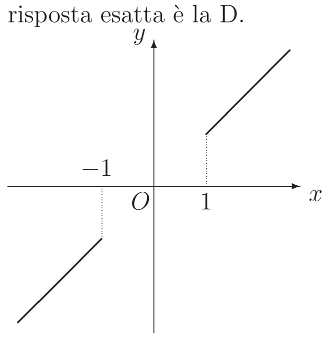
C. una semiretta

D. una coppia di semirette

E. una retta

Geometria analitica piana; luoghi geometrici descritti da sistemi di equazioni e disequazioni.

Conviene partire dalla più semplice delle due condizioni: $y = x$. È noto che questa rappresenta la retta bisettrice del primo e terzo quadrante. Sui punti di questa retta si impone ora l'ulteriore condizione $xy > 1$, equivalente (essendo $y = x$) a $x^2 > 1$ e quindi alle condizioni: $x > 1$ oppure $x < -1$. Questo significa che tra i punti della retta $y = x$ dobbiamo scegliere solo quelli con $x > 1$ oppure $x < -1$. Il luogo geometrico è quindi una coppia di semirette, e la risposta esatta è la D.



Risoluzione di sistemi di equazioni e disequazioni.

---

91. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, quale delle seguenti è l'equazione di una circonferenza?

A. $x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0$

B. $4x^2 - 3x + 4y^2 - 5y - 1 = 0$

C. $(x-1)^2 - (y-2)^2 - 1 = 0$

D. $x^2 + y^2 + 1 = 0$

E. $x^4 + y^4 - 1 = 0$

Geometria analitica piana; circonferenza.

L'equazione della circonferenza di centro (a, b) e raggio r è

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

ossia

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + \left(a^2 + b^2 - r^2\right) = 0$$

Quindi

A. È errata perché l'equazione contiene un termine in xy.

C. È errata perché nell'equazione i termini in x^2 e in y^2 hanno coefficiente 1 e -1, anziché lo stesso coefficiente.

D. È errata perché l'equazione, riscritta nella forma $x^2 + y^2 = -1$, indicherebbe centro $(0, 0)$ e raggio r tale che $r^2 = -1$, il che è assurdo.

E. È errata perché l'equazione non è di secondo grado.

Per esclusione, la risposta esatta è la B.

Con un po' di pazienza si può effettivamente riscrivere l'equazione B nella forma standard

$$\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{8}\right)^2 = \left(\frac{5}{8}\sqrt{2}\right)^2$$

evidenziando che si tratta della circonferenza di centro $\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$ e raggio $\frac{5}{8}\sqrt{2}$. Tuttavia, in base ai ragionamenti precedenti questo non è necessario per rispondere alla domanda.

Equazione della circonferenza.
